LETTERE FILOSOFICHE

DI

SEBASTIANO PURGOTTI

Principalmente riguardanti l' elementare insegnamento delle Scienze esatte.

PERUGIA
TIPOGRAFIA BARTELLI
1852.

LETTERE

DI

SEBASTIANO PURGOTTI

AD UN AMICO

INTORNO

A VARI FILOSOFICI ARGOMENTI

PERUGIA
TIPOGRAFIA DI VINCENZO BARTELLI
1852.

LETTERA I.ª

RIFLESSIONI

SULL' ALGORITMIA O NUOVO METODO DELLA NUMERAZIONE E DELLE QUATTRO PRIME OPERAZIONI DELL' ARITMETICA DEL PROF. EMILIO JACOBY, E SU I METODI IN GENERE CHE RIGUARDANO QUESTA SCIENZA.

ARGOMENTO

Jacoby nota che i comuni metodi dell' insegnamento delle scienze esatte hanno il difetto di dirigersi più alla memoria che alla intelligenza — Egli esagera troppo questo inconveniente e col nuovo suo metodo non vi porge riparo — Piuttosto che percorrere nuove strade, giova all' oggetto rettificare le già note — Io mi sono appigliato a questo partito nei miei elementi di Matematica.

1. Ho appreso con vera soddisfazione che Voi abbiate dato termine al corso dei filosofici studi, ed approvo pienamente la palesatami determinazione di proseguire nell' esercizio di leggere e scrivere intorno alle già studiate materie. Quando però Voi chiedete a me delle norme per formarvi quell' occhio e criterio metafisico che valga e a farvi accorgere degli errori in cui sono caduti gli scrittori che andate leggendo, e da quelli a salvarvi in cui potreste scrivendo cadere, mi avveggo che Voi date alle mie forze un valore assai più grande di quello che esse si abbiano. Ciò non pertanto mi sarà certamente piacevole lo

spesso conferire con Voi per mezzo di una epistolare corrispondenza, dandovi così que' suggerimenti che sono alla portata degli scarsi miei lumi.

2. Uno dei mezzi i più valevoli a mio credere per leggere e scrivere con profitto in filosofiche materie si è il formarsi un' abitudine di non ammettere proposizione alcuna senza aver bene ponderato il significato delle parole. Il trattenersi più su i segni che sulle idee è la fonte principale di tutte le inesattezze che osserviamo, e non poche, nelle opere scientifiche malgrado i progressi delle scienze. Uso facendo d' altronde della indicata cautela, non v' ha dubbio che si leggono poche pagine nel tempo che altri leggono molti volumi, ma si legge con profitto: si scrive poco, ma si scrive, non già senza errori (chè umana condizione ella è il non andarne immuni) ma con minor pericolo di commetterne; e così penetrando nelle viscere, anzichè sfiorare la superficie delle materie a trattarsi; siccome fanno talvolta coloro cui null' altro muove che il ticchio di essere salutati autori, si scrive con maggiore probabilità di non incontrare la taccia di plagiarii inutili di quanto altri hanno detto prima di noi.

3. L' intertenere la nostra attenzione più su i segni che sulle relative nozioni io son d' avviso esser malsano latte succhiato nei primi corsi filosofici elementari, e specialmente nella parte che riguarda le Matematiche pure e miste. Di quì la mancanza di esattezza e di precisione nei fondamentali concetti che la loro influenza estendono sòpra altri moltissimi, di cui frequenti applicazioni occorrono negli usi della vita: di quì gli errori che le contratte abitudini forza hanno avuto di insinuare pur anche nelle menti e quindi negli scritti di Uomini sebbene forniti di altissimo ingegno: di quì quell' antipatia verso lo studio delle scienze esatte che in giovani di belle speranze pur anche sviluppasi non per poca disposizione di mente, come essi falsamente si

avvisano, sì bene perchè sviati sono senza accorgersene dai cattivi metodi, e disgustati dei falsi concetti. Ed in questo mio divisamento già da tanti anni indietro manifestato con la stampa e con la voce ai miei allievi, piacemi vedere oggi convenire anche il Francese Professor Jacoby, siccome rilevo dal suo libro intitolato *Algoritmia* tradotto in Torino nel 1851. che ora ho terminato di leggere, e che (ben prevedendo che voi amate conoscere ciò che io ne senta) prendo perciò a soggetto di questa mia lettera.

4. Nella prefazione così egli si esprime « *I libri e-* « *lementari sono in generale difettosi. Tutti ristam-* « *pati gli uni sul modello degli altri danno le medesi-* « *me definizioni, le medesime teorie, e non offrono al-* « *cuna idea filosofica: si limitano a spiegare il mec-* « *canismo dei simboli, e contengono piuttosto parole che* « *cose, s' indrizzano piuttosto alla memoria che alla in-* « *telligenza* » E più sotto « *Sino a tanto che nello stu-* « *dio di una scienza qualunque e più di tutte le altre* « *nella Matematica farete appello alla memoria e non* « *alla intelligenza, non riescirete. Troverete per un mo-* « *mento qualche risultato che vi parrà plausibile, ma non* « *v' ingannate, non sarà che apparente. I fanciulli sa-* « *pranno ripetere i numeri a guisa di pappagalli, sa-* « *pranno anche eseguire le prime operazioni dell' Arit-* « *metica a guisa di automi: ma quando procederete* « *verso le quistioni che esigono il concorso di quelle pri-* « *me operazioni, che richiederanno qualche cosa di più* « *di un semplice sforzo di memoria e di un lavoro mec-* « *canico, vedrete la nullità dei vostri tentativi.* »

5. Queste osservazioni e rilievi presi genericamente e con le debite eccezioni a me sembrano giustissimi. Non di rado avviene però che quando noi siamo preoccupati da una idea, ingigantiamo tutto ciò che può favorirla, e dipingiamo con i più neri colori gli inconvenienti e i difetti

che derivano dal metodo contrario a quello che vezzeggiamo, e che ne piace di professare. *Incidit in Scyllam qui vult evitare Charibdim*: tanto è difficile che quel precetto di moderazione « *inter utrumque tene* » sia saggiamente adempiuto. Pur troppo, torno a ripeterlo anch' io, si obbligano i fanciulli a trattenersi più su i segni che sulle idee, ma nel vecchio comune insegnamento, sebbene difettoso, la cosa non è poi spinta, ed anche a volerlo sarebbe impossibile, al grado immaginato da Jacoby, che cioè giammai alla mente degli allievi si affacci il numero reale; e che perciò l' apprendimento progredisca propriamente a stretto rigore di termine non oltre la scorza dei segni. In qualunque metodo infatti, e sia il più goffo e riprovevole, indipendentemente dal metodo stesso, sempre avviene che al nome di un numero, o alla vista di una cifra, e sia p. es. il 4, naturalmente di per sè si affaccino alla immaginazione quattro palle, o linee, o punti, i quali riguardiamo come i segni sensibili del numero astratto di cui si ragiona. E quando trattisi di numeri più forti, sicchè tanti distinti oggetti la immaginazione non sa schierarsi innanzi per quante sono le sue unità, pure il fanciullo non abbandona il numero reale per gittarsi soltanto sul simbolo, siccome il nostro Autore pretende, e se non ha fagioli, sassolini, pallottole, o lo strumento che i Russi chiamano *Scote* ed egli *Abasse*; uno strumento il fanciullo adopera che mai si dimentica di portar seco, e questo è costituito dalle dita delle sue mani, al novero delle quali appunto, non senza filosofico avvedimento, quello hanno limitato delle unità costituenti ciascuna unità collettizia degli ordini successivi, gli inventori dei sistemi di numerazione. Col sussidio delle dita ben agevolmente si accorge l' Allievo che a 9 aggiungendo 8 si forma 17: che 4 volte 6 fa 24; e di questo sussidio a far uso prosegue, finchè per i replicati esercizi la memoria gli risparmia questa fatica. Nella comune istru-

zione dunque anche la più materiale, non accade giammai che il fanciullo ad evidenza non si convinca che 17 non è che 9+8, che 24 non è che 6+6+6+6. Quand' anche appositamente uno si affaticasse a far credere che il segno 9 più il segno 8 hanno l' arcana forza di produrre i due segni 1 e 7 che uniti insieme leggiamo *diciasette*, e che quattro volte il segno 6 produca i due segni 2 e 4 che uniti leggiamo per *ventiquattro*, il semplice senso comune del fanciullo, e sia pur privo del pallottoliere o dell' abbasse, supplirebbe alla stolida stravaganza dell' istruttore, e giungerebbe a formarsi l' idea del numero reale che risulta dalle sue operazioni. Quindi nei metodi anche i più riprovevoli il difetto di vezzeggiare più il segno che l' idea non giunge agli estremi sopra indicati, come senza aver consultato la sperienza maestra delle cose, sembra (pag. 17) che Jacoby supponga. Egli è perciò che più volte ho io veduto le lagrime dei fanciulli allorchè sono stati obbligati a desistere dal trastullo per porsi allo studio dei numeri, ma « *le lagrime e gli inauditi patimenti dei fanciulli che si* « *affannano per tanto tempo intorno alle cifre senza po-* « *terne comprendere nè i valori nè i rapporti* (pag. 8) » io non ho veduto giammai e nemmeno rammento « *di aver* « *vegliato e pianto su quella terribile e tanto imprecata* « *tavola pittagorica* (*pag.* 18) » che non so di quali altri titoli la graverebbe, se fosse invece la tavola della ghilottina.

6. La mia stima verso gli Autori, vi confesso il vero, va di un poco scemando, allorchè gli veggo esagerare i difetti degli altrui metodi per esaltare i loro sistemi. Non per questo però mi sono astenuto dall' esaminare l' accennato lavoro: che anzi ho cercato di farlo spassionatamente con ogni cautela ed impegno: ed eccovi dei miei studi il fedele rendiconto.

7. Jacoby parte dalla supposizione che « *i segni arit-*

metici penetrati nell' intelletto dei fanciulli assieme ai vocaboli che gli indicano, divengono per essi numeri e cifre. Quindi non avendo mai conosciuto il numero reale, non sanno più comprendere che quelle sono due cose distinte » (pag. 17) e questa supposizione io già vi ho fatto notare essere erronea. Bisogna non figurarci a nostro modo la mente dei fanciulli; ma con i saggi criteri d' una sperimentale e non romantica ideologìa farsi strada a studiarla nei suoi sviluppi ad oggetto di trovare il metodo più idoneo per dirigerla nella istruzione. Dovizioso possesso di algebriche e geometriche cognizioni non basta per bene insegnare: indispensabile è la communicativa pur anche; e dei suoi segreti è la retta metafisica che tiene le chiavi. Se Jacoby l' avesse bene consultata in questa, siccome egregiamente ha fatto in altre circostanze, si sarebbe accorto che egli muove da un falso dato, quale si è quello di credere che l' idea del numero reale non sia nei comuni metodi annessa al segno giammai; e se questo dato è falso, falsa è la conseguenza, che vi si fa derivare, della necessità del nuovo metodo pel retto apprendimento della numerazione e delle quattro operazioni.

8. Ma se il suo metodo non è necessario, è almeno preferibile ai comuni per utilità? Alla prima occhiata che al medesimo io detti, e specialmente quando mi feci a leggere il nuovo processo della moltiplicazione, fui da un primo impeto tentato a gittar via di mano il libro con la determinazione di non più proseguirne lettura, tanto mi pareva e complicato e lungo e difficile ad eseguirsi quel suo nuovo processo: ma riflettendo che le precipitate determinazioni sono talvolta l' effetto di qualche fumo di ambizioncella che offuscandoci gli occhi, brutto ci fa apparire tutto ciò che non è ai nostri pensamenti conforme, e noi un pochino più belli di quello a dir vero che siamo, non secondai quel primo movimento d' indignazione e di bile; ed ar-

matomi di pazienza vi tornai sopra a riflettere. E per non occultarvi il vero, è d' uopo vi confessi, che dopo la seconda lettura io mi accorsi, che quel vapore intempestivo che mi era salito al capo dianzi, non era al certo lodevole. Tornando a leggere intesi meglio, dispregiai meno, e sempre più mi convinsi quanto l' essere parchi in pronunciare sentenze sia prudente temperamento. Felice voi che già veggo aver contratta questa modesta abitudine: voi così non correrete pericolo di provare la dispiacenza di dovere in seguito o contradirvi, o esser preso per un ostinato sostenitore dei più palpabili errori, siccome ben vi accadrebbe, se abituato vi foste a troppo facilmente dispensare come dal tripode con un'aria di gravità degna dell'epifonema e dell' aforismo mal digerite opinioni.

9. Dal mio detto però, che alla seconda lettura del libro in discorso *dispregiai meno*, veggo bene che voi conchiudete che pienamente non fui soddisfatto, nè io so negarvelo. Intanto io non voglio discutere se bene, o male Jacoby opini allorchè (pag. 12) così si esprime « *Sappiamo* « *quanto sia difficile distruggere le vecchie idee, vincere* « *le antiche abitudini, e la sperienza ci ha convinto che* « *i Professori e gli Istitutori sono i primi a respingere* « *i metodi nuovi, sia perchè questi li costringono a cam-* « *biare i loro modi di procedere, ed esigerebbero da loro* « *qualche momentaneo aumento di lavoro, sia perchè* « *appartengono alla classe degli amici dell' immobilità, in* « *una parola sia per pigrizia sia per sistema* ». Dirò solamente, potere io per mia parte assicurarlo, che nel prendere ad esame la sua produzione, mosso certamente non sono ad essergli contrario nè dall' uno, nè dall' altro dei due nominati difetti.

10. Nel nuovo suo metodo le addizioni e sottrazioni si cominciano a sinistra, mentre noi abbiamo in uso di dar principio a destra. Nell' addizione si aggiungono, nella

sottrazione si tolgono al primo numero dato prima le unità del maggior rango, e poscia quelle dei successivi del numero seguente, ed a mente si ritengono sempre i successivi risultati finchè all' ultimo si giunga. Nella moltiplicazione il metodo consiste nel fissare prima di ogni altro per mezzo di una formola algebrica quali sieno i termini che costituiscono il prodotto dei fattori polinomi, e quindi (senza più ottenere e segnare come nei comuni processi distintamente i prodotti parziali) nel fare il prodotto delle unità per le unità, e scrivere la cifra che debbe esistere nel posto delle unità del totale prodotto, ritenendo come resto la cifra esprimente le decine che vi andrebbero unite. Questo resto poi si unisce alla somma dei prodotti delle decine del moltiplicando per le unità del moltiplicatore, e delle unità del moltiplicando per le decine del moltiplicatore affine di ottenere così quel numero la cui ultima cifra a destra esprime la cifra che debbe esistere nel rango delle decine del totale prodotto; e in simil modo con mentali addizioni di risultati che sino ad un certo punto van crescendo di numero, e mostrano perciò impossibile la tanto decantata brevità del processo, si ottiene la cifra che il prodotto totale debbe presentarci nel terzo, nel quarto rango, ec. Nella divisione la differenza non istà nel metodo che è molto simile a quello che usiamo, ma sta nel dovere ritenere a memoria ciò che nel metodo ordinario si scrive. Or non vi ha dubbio che l' esercizio ha una potente influenza a far sì, che queste per noi novelle operazioni divengano facili in un modo mille volte maggiore di quello che a primo aspetto non sembri: ciò non ostante per quanto io mi sforzi di attribuire miracoli a quella abitudine che non ho, io non mi sento ispirato ancora abbastanza per elevare a cielo queste innovazioni.

11. Che in mancanza delle cifre o nella circostanza di non poterne far uso il metodo proposto da Jacoby sia ot-

timo, pienamente ne convengo ancor io, e sono ben persuaso che il suo Allievo Enrico Mondeaux, il Pastor calcolatore della Turrena, cui da dodici anni a questa parte egli tien dietro, siasi servito degli accennati processi mentali suggeritigli dallo stesso naturale suo acume, e questi a un di presso erano pur quelli che praticavano e il Giovinetto *Mangiamele* e l' altro anche più celebre il Siciliano *Vincenzo Zucchero*, la cui forza prodigiosa di calcolare mentalmente ebbi fin dal 1834 occasione di porre a tortura e di ammirare nella soluzione da essi datami con la massima celerità ed esattezza di problemi di primo e secondo grado non solo difficili nel concetto, ma esigenti pur anche moltipliche e divisioni sopra numeri di molte cifre. Ai felici risultati però di questi rarissimi e meravigliosi calcolatori, più che il metodo da essi praticato, giovano le felici disposizioni della mente, mercè le quali con una rapidità di percezione senza pari afferrano i rapporti, e con una singolare ritentiva serbano alla immaginazione presenti le numeriche risultanze, senza che la sopravenienza di nuovi numeri per lungo processo di calcolo ottenuti ne cancelli le tracce. Quando però si profitti dei vantaggi che alla scienza aritmetica hanno reso le cifre (nè l' abuso dei segni debbe poi spingerci a disconoscerne l' utilità, perchè *in vitium ducit culpae fuga si caret arte*) a me sembra che i nuovi metodi per quanto l' abitudine possa influire a loro favore, non potranno esser giammai preferibili nè per brevità, nè per facilità a quelli che noi abbiamo comunemente in uso. (1)

(1) Nell' esternarvi questo mio riservato giudizio, vi esterno il desiderio pur anche che avrei di conoscere, se altri ben di me più valenti convenissero nelle mie idee, e quindi la brama che minore proclività si avesse in Italia di far buon viso senza la debita ponderazione alle scientifiche novità peregrine. Io al certo non amo dipingervi a tinte troppo vive ed inopportune il sentimento di Nazionalità. Che anzi, troppo forse beandomi e troppo sperando nei prodigiosi progressi della dinamica,

12. I processi che noi pratichiamo nelle quattro operazioni sono eccellenti : ciò che in vece di essere eccellente è assai difettoso è il gretto metodo con il quale vengono qualche volta insegnati agli allievi senza loro additarne l' origine , le ragioni , le applicazioni . L' insegnamento delle matematiche non ha bisogno a mio credere di metodi nuovi per le operazioni , ha bisogno invece di rettificazione di idee nelle teorie che vi hanno rapporto e da cui esse derivano ; e Jacoby sembrami abbia tenuto un sentiero opposto : ha egli inventato un nuovo metodo per operare , e non ve ne era il bisogno : non si è poi del tutto spogliato degli errori di cui sono deturpati i vecchi libri dell' insegnamento sebbene saggiamente ne abbia riconosciute e condannate le cause , e questa era necessità : poichè lo sgombramento di tali errori che sono ben gravi e dannosi , è il beneficio sommo che la gioventù studiosa si attende da coloro che con vero amore delle scienze e di essi , si occupano della istruzione . E che io mal non mi apponga nel credere che l' Autore tutte non abbia eliminate ancora quelle antiche idee erronee che deturpano la scienza , da vari squarci del suo libro il deduco .

13. Comunemente nei corsi di Matematica con un errore vergognoso , perchè opposto ai canoni della Logica la più elementare , ed il più dannoso alla istruzione perchè seco trascina a molte inesattezze , come in altra mia mi farò

dei ponderabili e degli imponderabili , la prima delle quali con le portentose sue applicazioni annulla le distanze , e la seconda rende istantanea fra lontani la communicazione del pensiero , mi vo persuadendo che reso il mondo una sola famiglia , le gare di nazionalità verranno un giorno riguardate pregiudizi simili a quelle reciproche antipatie , che ravvisiamo sorridendo fra le piccole terre limitrofe . Ciò non ostante però , e perchè noi italiani che possiamo vivere del pensier nostro , vivere amiamo del pensiero che regna oltre le Alpi fino ad idolatrarne i difetti in uno dei più importanti fra i sociali interessi , qual' è l' istruzione ?

a dimostrare, si collocano nella classe dei numeri astratti anche i numeri che indicano quante volte alcuni oggetti debbono essere ripetuti. Ebbene in questo medesimo errore mostra di essere anche l'Autore di cui ragioniamo, giacchè nelle diverse circostanze in cui egli parla delle qualità dei numeri, sempre egli nomina *oggetti o cose*, inculca la utilità *di non separare giammai la cosa contata dal suo concetto* (pag. 20) e non dà mai il menomo indizio di essersi avveduto che dai numeri indicanti gli oggetti che debbono nel calcolo esser presi o tolti, meritano di essere distinti gli altri indicanti le *volte* che i primi vanno ripetuti, e che questi numeri indicanti ripetizione non debbono con gli astratti confondersi malgrado il pessimo esempio che matematici anche sommi abbian fatto finora.

14. E rapporto ai segni + e —, prosegue egli a coltivare quell' errore medesimo in cui io pure, seguendo la corrente, mi rimasi nelle prime due edizioni dei miei elementi. Ed in vero sebbene avessi fin d' allora ben conosciute e corrette molte espressioni inesatte intorno alle quantità negative, pure non era giunto a spogliarmi ancora di tutte le erronee idee che appreso avea nella scuola. Pareami anzi, vi dirò di più, ben giusto il riflesso di Bossut, il quale ci dice che mentre in Aritmetica *bisogna badare al solo valore delle quantità, in Algebra badar conviene ancora al loro modo di essere*, alle quali parole fa pure eco, per tacere di altri molti, anche il celebre Montferrier, allorchè nel suo Dizionario delle Matematiche ci dice che bisogna distinguere *le quantità che sono in funzione di accrescimento da quelle che sono in funzione di diminuzione*. Io però finalmente mi sono accorto che questo applicare alle quantità una diversa maniera di essere è un errore (parlo chiaro e non trepidando) è un errore solenne, col quale attribuendo alle quan-

tità ciò che è proprio della operazione soltanto cui si assoggettano, porta ad altri errori gravissimi in cui sono caduti dei sommi pur anche. E per nominarvene un solo fra i tanti che da quella inesattezza dipendono, ditemi e non vi pare gravissimo sbaglio quello di chiamare insignificanti i simboli delle potenze negative tanto intere che frazionarie, quasi che l' Algebra si prendesse diletto di prender le mosse da simboli, cui non si può annettere idea veruna? Potranno i procedimenti del calcolo recarci non vi ha dubbio a qualche formola insignificante, ma da simboli insignificanti che per pura convenzione si fanno eguali ad una quantità, cominciare, Amico mio, le dimostrazioni è troppo antilogico procedimento, e grandi uomini hanno avuta la inavvertenza di cadervi non per altro, se non perchè trascinati appunto da quelle inesatte idee che immediatamente discendono dal falso principio, sì radicato ormai nell' insegnamento dell' Algebra, che i segni + e — qualifichino le quantità. Ebbene in questo falso principio stesso con la comune dei Matematici anche Jacoby prosegue ad essere, poichè (pag. 40) ci dice che » *i segni* » *+ e — non sono solamente segni algoritmici, ma* » *segni di qualità, cioè danno una qualità alla quan-* » *tità.* »

15. E rapporto alle definizioni della moltiplica (pag.51) e della divisione (pag. 67) seguendo egli ad litteram quelle di Cauchy, mostra quanto l' errore dei grandi abbia potente influenza, giacchè Voi già ben conoscete l' enorme difetto di quelle, e torneremo in altra lettera ad osservarlo. Se Jacoby piuttosto che esser ligio alla autorità del celebre Cauchy, avesse in vece profittato degli insegnamenti con tanta chiarezza e verità esposti specialmente intorno ai requisiti e ai difetti delle definizioni di quel celebre filosofo Laromiguier, uno squarcio del quale egli pone per testo nel suo discorso che precede la prefazione (pag. 6)

non sarebbesi certamente recato sulle ruotaje stesse che Cauchy aveva battute.

16. E da tutto l'esposto pare a me di potere conchiudere che il Professore Francese il quale tanto declama contro gli antichi metodi, ed uno nuovo ne impianta, da quei metodi si emancipa senza totalmente emanciparsi dai loro errori, e senza emanciparsi da quel difetto pur anche di esporre processi privi delle relative dimostrazioni, siccome gli accade, allorchè (pag. 90 al 92) dà le prove della moltiplicazione e divisione dette del 9 e dell' 11. Ed eccovi ingenuamente esposto ciò che io senta del suo lavoro.

17. Nello insegnamento l' introdurre nuove strade è lusso, e spesse volte nocivo: rettificare d'altronde quelle che abbiamo, è preciso dovere di ogni diligente istruttore, ed io nella compilazione dei miei elementi di Matematica mi sono appigliato a questo partito, novità non introducendo se non dove me le hà consigliate il da me creduto vero bisogno.

18. Ma le novità, sebbene sieno parche, se crediamo a Jacoby (§ 9) spesso incontrano opposizione; e quindi il procurare di farsi a sè stesso tutte le obbjezioni possibili, lo studiare di cercarle quà e là con la lanterna di Diogene, per poi maturamente osservare se le nostre opinioni reggano al severo dente della critica, è un altro mezzo utilissimo che mi piace di suggerirvi per iscuoprire la verità e sfuggire gli errori. Io ho cercato dal canto mio le strade tutte per porlo in esecuzione. E da rigido censore sferzandomi il più che mi è stato possibile, ho cominciato a dire contro me stesso. E perchè nelle tue produzioni abbandonare le tracce battute dai sommi Padri delle matematiche discipline, perchè stemperare in asiatiche circonlocuzioni e in sofistici dettagli il nerbo degli algebrici ragionamenti e quella stretta catena di deduzioni che non si apprende fra le storte e i fornelli, e che forma il bello proprio delle matematiche dimostrazioni? Trattenerti su que-

ste non è missione cui ti abbia chiamato Natura, non è peso dagli omeri tuoi. E avresti tu la pretensione di farti riformatore dei metodi su i quali si sono formati tanti profondi Algebristi? *E vil rana che ti gonfi innanzi al bue* vorresti a quel che veggo far bersaglio dei pazzi tuoi colpi il gran Newton medesimo, poichè ti fai a criticarlo pur anche nelle stesse definizioni del numero e delle prime aritmetiche operazioni? Crederesti tu di saperne anche più di questo genio sublime? Ah lascia la bizzarria che ti ha preso di singolarizzarti con le puerili tue novità e torna sul retto sentiere. *Quicquid praecipies esto brevis, ut cito dicta percipiant animi dociles, teneantque fideles* « E da queste mie parole parmi già di vedere » *la pigra turba, che approva o nega col giudizio altrui*, con solenne gravità il non grave capo chiuare in atto di approvazione; chè un frizzo, un testo bene o male a proposito applicato, il che poco importa, tosto da essa unanime riscuote un applauso. Il dispregiare infatti è ben facil cosa, sebbene facile non sia il farlo sempre con ragione e criterio. Nè fornite di ragione e criterio sarebbero certamente tutte le obbiezioni che con cinica sferza ho io cercato di affacciare poc' anzi.

19. Ed in vero quanta sia per Newton, non dirò la mia stima, dirò invece la mia venerazione, io non saprei con parole abbastanza significarvelo. Allorchè mi torna in pensiero e quella estiva notte serena, e i benefici raggi dell' astro che rischiarando le tenebre di modesta luce abbellava i viali di quell' avventurato giardino, e quel pomo che dalle aure agitato cadde sul capo venerando di quell' Uomo immortale chè vi passeggiava a diporto, e gli slanci di quell' altissima mente, che dal colpo ricevuto, motivo trae di meditare che sarebbe avvenuto se il pomo fosse dalla luna disceso, e da questo satellite vola ai pianeti, e dai pianeti al sole, alle fisse; e col pensiero errante così per le immense pianure dello spazio, a sempre

più sublimi concetti l' umano ingegno elevando, le arcane leggi ci svela con cui nei firmamenti le gigantesche moli librò l' Onnisciente Architetto, commosso io mi sento da un palpito affettuoso che ha più di devozione che di rispetto. E allorchè compreso da tale quasi estatica ammirazione verso questo genio sublime, dò uno sguardo in pari tempo a me stesso, nel nulla mi rannicchio delle mie cognizioni e delle mie forze.

20. Ma e che perciò? Malgrado il peso dell' autorità che Newton esercita sul mio spirito, credereste Voi forse che io lo stimassi infallibile? No certamente. *Humani nihil a me alienum puto* doveva dire pur egli; e se a tutti è ben noto che seguirlo io non lo debba in quelle sue espressioni, per le quali non ben distinta apparisce da quella dello spazio la immensità dell' Onnipotente, e quando asserisce impossibile quell' acromatismo, che possibile dimostrò poscia con la teorìa e con i fatti il celebre Dollond, così pure seguirlo io non debbo nemmeno allorquando nella sua Aritmetica Universale egli usa espressioni, le quali sebbene seguite da molti e da sommi, pure sono tali che si oppongono alla esattezza dei concetti ed alla verità.

21. E Newton non solo, ma tutti gli altri sublimi ingegni che hanno figurato e figurano nelle matematiche discipline io sommamente stimo e rispetto: ma quando mi si offre d' innanzi una certa bella ad un tempo e severa matrona nel pieno splendore delle sue potenti attrattive, al cospetto di questa Donna, che alle storte e ai fornelli presiede, come alla squadra e al compasso, cade in me ogni culto per Newton e per Eulero, come nel Principe della romana eloquenza cadeva per Socrate e per Platone, e Lei sola allora venero e bacio. Voi già m' intendete: questa donna è la VERITA'.

22. E se talvolta da Lei si sono allontanati per qualche errore sfuggito alla loro sagacità i geni pur anche, dovrà

per querto diminuire la nostra stima per essi? Nò. I geni non cessano di essere tali malgrado qualche improprietà o inesattezza od errore, che si trovi nei loro scritti, come in pari tempo le improprietà, le inesattezze, gli errori di esser tali non cessano pur essi (e quindi non cessano di essere perniciosissimi alla istruzione) perchè commessi dai Geni. Ad essi ben poco o nulla sono imputabili i citati difetti, poichè alla vasta loro mente immersa nelle sublimi speculazioni e piena di nuovi sempre eccellenti trovati, non è dato di essere sofferente abbastanza per occuparsi del maneggio della lima di sue produzioni, lavoro paziente, al quale in vece è più adatta la mediocrità degli ingegni. E dopo queste dichiarazioni l' opinare che colui il quale avverte o corregge un errore che nelle opere trovisi di qualche classico Autore, farlo nol possa senza prima impazzire, senza cioè essere invaso da un orgoglio più ridicolo che detestabile di credersi di essi più eccellente e più meritevole, non sarebbe egli un sospetto che mentre i Moralisti lo riferirebbero ad una classe non molto lodevole, mostrerebbe poi ad evidenza la piccolezza della mente in cui si fosse formato? Dirò di più. Dotato come io sono d' uno spirito conservatore che mutazioni non approva senza l' evidenza della vera utilità loro, e fede ve ne fa pur anche il mio Trattato di Chimica, come poter presumere che per mera leggerezza io mi sia lasciato sopraffare dalla stolta ambizione di comparire un autore originale, e da una stoltissima neomanìa che spinto mi abbia alle modificazioni introdotte? Voi che mi conoscete non lo credete sicuramente. Ed in questo vostro opinamento io vi confermo, potendovi con animo sicuro asserire, che niuna innovazione al certo è stata fatta nei miei Elementi, se non dopo molti e molti anni di riflessione e di studio, e dove soltanto mi è sembrato che una vera necessità lo esigesse. Ed in varie delle seguenti mie lettere voglio ap-

pagare quella curiosità che mi avete manifestata più volte di conoscere come la mia mente sia stata condotta a qualche novella veduta di vostra soddisfazione, coll'esporvi ad uno ad uno i motivi che mi hanno indotto a deviare dai metodi comuni ed a fare qualche innovazione 1.° nelle distinzioni dei numeri, 2.° nelle definizioni delle operazioni, 3.° nelle dimostrazioni relative alla moltiplica e divisione delle frazioni, 4.° nel valore dei segni + e —, 5.° nella idea delle quantità positive e negative, 6.° nella spiegazione delle regole dei segni per la moltiplicazione e divisione algebrica, 7.° nelle nozioni delle potenze sì frazionarie, che nulle, che negative, 8.° nella idea e trattamento delle quantità irrazionali, 9.° nella idea e trattamento delle quantità immaginarie, 10.° nel significato delle così dette soluzioni negative delle equazioni, 11.° nei primi concetti degli enti geometrici, 12.° nella simiglianza delle figure, 13.° nella quadratura delle superficie, 14.° nella cubatura dei volumi. Ed in vero su tutte queste materie, le quali se non sono molte, non sono nemmeno nè pochissime nè poco interessanti, ho il fermo coraggio di sostenere che nel comune insegnamento, fatte le debite eccezioni, i circoli viziosi, le petizioni di principio, i giuochi su i segni sostituiti alle dimostrazioni sulle idee per troppo amore di *brevità* sono sì frequenti, che lo sdegnarsene, e il non cessare dal declamarvi contro finchè il vergognoso errore a scuoprire s'incominci, e a detestarsi dai suoi partigiani, è virtuosa necessità. Convincere gli Insegnanti non solo, ma far breccia nell'animo loro, dipingendo con vive energiche tinte e le mostruose deformità dell'insegnamento e i danni che ne derivano è mia ferma intenzione. Quindi in tutte quelle mie riflessioni che essi riconosceranno più giuste, io non mi contento d'una *sterile* approvazione: cerco di più, io voglio una approvazione *operante* in virtù della quale ciascun di loro dica a sè stesso: questo tratto

da me giusta i comuni metodi esposto è un errore: da qui innanzi io debbo e voglio nell'insegnamento evitarlo.

23. Nè un male inteso rispetto verso le altrui opinioni debbemi sul labbro trattener la parola: chè colpevole anzi il mio silenzio sarebbe se non mi ponessi tutti a svelare i paralogismi e le inesatte espressioni, mercè le quali parte viene per nausea sviata dagli studi delle matematiche, parte viene inesperta colta al laccio dell'errore quella studiosa gioventù, che ha tutto il diritto di essere ammaestrata senza inganno e senza impostura. E del mio declamare contro i vecchi vizi della istruzione non potrà veruno adontarsi. Che se a mostrarne la potente influenza, noterò qualche volta non esserne stati risparmiati i Newton, gli Euleri, i Bézout, i Bossut, i Laplace, i Legendre, i Francoeur, i Lacroix, i Montferrier, questi Classici sommi hanno tanti diritti alla pubblica estimazione, che il notare in essi qualche difetto non è un'onta al certo alla loro gloria, ma una semplice dimostrazione che sono Uomini anch'essi. D'altronde altri personaggi oltre questi non verranno in iscena, perchè ho sempre avuto a sdegno che in vili animosità vergognose si convertano le scientifiche controversie. Contro i vizi però i più palpabili dello insegnamento io declamerò sempre, e niuno potrà consigliarmi a non farlo. Ignominioso infatti sarebbe che nel primo anno del corso filosofico dedicato alla Metafisica e Matematica elementare, mentre dalle lezioni di Logica vengono i Giovani saggiamente forniti di tutti i mezzi e criteri atti ad evitare gli errori, un ora dopo venissero all'opposto obbligati a coltivarli in pratica nella scuola degli elementi d'Algebra per un umano riguardo. Nè tal circostanza sarebbe rara, perchè l'elenco dei difetti che vi ho poco fa enumerati non è molto breve. Ben poi gradirei che le riflessioni che vi esporrò su ciascuno di essi fossero lette da quegli istruttori i cui modi di vedere non sono consoni ai miei, e lo spero, perchè parmi che coscienziosamente non dovreb-

bero dispensarsi dal farlo senza riguardarmi o per un solenne impostore, o per un visionario imbecille. La prima taccia io sento in me stesso di non meritare e non l'avrò perciò certamente: la seconda io non ho certezza che non mi convenga, poichè il mio intimo senso mi accerta che io credo di non delirare, ma non mi accerta che io non deliri, e il precetto *Nosce te ipsum* potrebbe per mia colpa non essermi stato raccomandato abbastanza: ma vi confesso il vero che io, mentre non mi sento umile al segno da pormi in capo di sempre delirare e sognare e anche allora che nel più vivace suo aspetto mi si presenta quella bella Matrona, che poch'anzi vi nominai, ho d'altronde fiducia che quella qualche stima, la quale sebbene immeritata, pur so di godere, mi sia garante non già perchè abbiansi a seguire le mie vedute (questa sarebbe non fiducia ma presunzione) ma perchè non abbiano i dotti a sentir vergogna di degnarle di un guardo, e di meditarvi alcun poco pur anche ad oggetto di riconoscere, se desse sieno chimerici sogni, od utili verità, e ciò mi basta, il mio intento è ottenuto. Ove io avessi sognato, sono ben pronto a correggermi; e vincendo quella pigrizia che m'indurrebbe a distogliermi dallo studio delle correzioni che mi fossero fatte, dirò a me stesso « *Cur nescire pudens prave quam discere malo?* » Mi auguro e spero che anche altri abbiano le stesse disposizioni rapporto a quelle mie vedute novelle che non fossero nè deliri, nè sogni, e la pubblica istruzione guadagnerà sempre.

24. Ma la possibilità d'un'altra obbiezione mi si affaccia al pensiero — Sia pur dato e non concesso, potrebbe pur dirmisi, che tu abbi avuta ragione di modificare qualche cosa negli elementi di Matematica: ma farti, figliuol mio, ad innovare anche le prime definizioni che si danno ai fanciulli sulla moltiplicazione e divisione degli interi, darti così a sconvolgere e porre a tortura le tenerelle loro

menti, oh! non è questa una prova evidente della tua neomania e delle tue leggerezze? Ed ecco anche a queste parole nella pigra turba di cui vi parlai altre mosse approvatrici di capo ed altri applausi — Ed io a cotestoro: miei cari cui tanta pena e tenerezza prende per la sventura di quei giovanetti condannati a porre a memoria le mie definizioni, per rincorarvi un poco dalla vostra afflizione, voglio pur darvi un cenno fin d'ora del come saprò in altra mia giustificarmi da queste accuse. Per tale oggetto ditemi sinceramente, siete voi soddisfattissimi (ma parliamo da soli a soli e con ingenuità, se pur l'animo vi basti di spogliarvi per un momento della contratta abitudine, di far credere che voi vedete sempre chiaro anche quando siete nel bujo) siete voi soddisfattissimi delle idee che vi si destano in mente, allorchè il Fisico vi dice, che *la densità è la massa divisa pel volume*; che nel moto uniforme *la velocità è lo spazio diviso pel tempo*? E se io vi dimostrassi, come farò in una delle seguenti mie lettere, che i Fisici non solo, ma gli Ideologi pur anche, i quali hanno voluto dare la debita spiegazione a quelle parole, non hanno colto nel segno, e che d'altronde svanisce ogni oscurità di concetto appena che applichiamo al caso le nozioni che nella definizione della divisione e quindi della moltiplicazione (che vi è in immediato rapporto) e nei loro dettagli sono state da me esposte e sviluppate, non avrei anche per questo solo titolo avuta tutta la ragione di introdurle? Ebbene: per darvi anche la storia dei miei pensieri, dirovvi, che la mancanza di precisione appunto nelle importantissime nozioni di Fisica sopra accennate, fù il motivo che ad innovare quelle definizioni m'indusse; e il fatto mi prova, che gli Allievi le intendono bene senza che veruno di essi siasi rotta la testa o siasi posto a piangere per impararle; e perciò cari miei non ve ne date più pena.

25. E come di questa innovazione, così di tutte e singole le altre è accaduto: niuna di esse ha avuto corso che non sia stata mossa da ben giusti motivi: ma su di ciò a suo luogo; giacchè io aborro da quella ciarlatanesca impudente pretensione, che talvolta come un cattivo pensiero io mi caccio dalla mente, di obbligarvi a credere giusti i miei pensamenti, unicamente perchè più di trentadue anni sono scorsi da che io insegno elementi di Matematica e diciotto da che gli insegno publilicamente. Queste non sarebbero ragioni, ma ciarle, ed io ho la speranza di convincervi con le prime e non assordarvi con le seconde.

26. A tutte le obbjezioni che mi sono venute alla mente ho dato risposta: ma allorchè avrò pur dimostrato, come spero, che giusti sono i motivi delle mie innovazioni, altra difficoltà rimane a superarsi. Gli Amici della immobilità hanno anch'essi le loro risorse. Quando si batte un sentiero novello, il minor male che possa piovervi addosso è il sentirvi dire, le cose sono vere, ma non adattate alla intelligenza dei Giovanetti: il buon uomo dell' inventore non si è accorto, poverino, che non è pane pei denti loro; e sebbene l' inventore abbia studiato per molti e molti anni il modo di rendere morbido questo pane, sebbene i fatti dimostrino che egli vi sia riuscito e che la Gioventù intende benissimo: questi non sono fatti, sono illusioni per essi. Non intendiamo Noi quelle pagine disgraziate, io mi vo imaginando che dicano fra sè cotestoro, figuratevi se intenderle possono quelle nascenti intelligenze; ed ostinati potrieno rimanersene nella loro opinione. Ciò forse non avverrà: ma se questa ostinazione si dasse, amate o caro amico conoscere quale io crederei che ne fosse la causa? Per appagarvi altro io non fo che richiamare al vostro pensiero una similitudine, che molti anni or sono io lessi in un corso d' Ideologia, e che mi è sempre rimasta impressa, tanto essa mi piacque: eccola « *Come è ben*

« *difficile scrivere in una carta già scritta in modo da* « *farsi intendere, così è difficile imprimere nuove idee* « *e nuovi metodi in una mente abituata a tutt' altri, se* « *prima non siasi esercitata a cancellare le vecchie im-* « *pronte* » più difficile io poi soggiungo, se a questa cancellazione non si trovasse la volontà disposta abbastanza.

27. Ma le tue innovazioni, mi si potrebbe pure incalzare così l' argomento, sono in tal guisa prolisse e stucchevoli, che nulla più. Ed io: taluna di esse potrebbe, ve lo concedo, essere esposta con più brevità — Ma il tuo libro non lascia alla mente de' giovani alcuna deduzione, alcun riflesso che serva di utile esercizio alla loro facoltà intellettiva — E i miei buoni Allievi, ripensando al tempo impiegato per isvolgere e scrivere i calcoli che nelle mie dimostrazioni sono sottintesi, vi rispondono per me che ciò è falso; ed un poco indispettiti vi dicono che voi avete senza leggerlo giudicato il mio libro dalla sola sua mole — Ma i professori che fanno uso del tuo libro sono obbligati di quando in quando a recidere in vece di aggiungere, tanto è male adatto per l' istruzione — E questa necessità di recidere io ve l' ho già concessa in qualche passo. Rapporto poi a molti altri, vi sarebbe mai pericolo, quando non v' influisse la scarsezza del tempo, che questa falcidia procedesse da mancanza di abilità? Non ci lasciamo illudere dal troppo amor di esser brevi, il quale talvolta ci fa giudicare inutili tante idee intermedie, che sono necessarie al retto intendimento delle dimostrazioni che seguono. Quando i passi i più interessanti e difficili della scienza voi trovate che sono esposti p. es. in dieci pagine sole con quella chiarezza medesima che trovate in altri autori che vi hanno impiegato chi pagine ottanta, chi novanta, chi cento, il primo è l' autore impareggiabile che a tutti gli altri dovete preferire, e stando così le cose, la brevità è un vero impagabile tesoro; e a questa sorta di brevità mira

il precetto del Venosino. Avvertite bene però che i tesori non si trovano con molta facilità, e che il giudicare, se realmente quelle idee che si stimano superflue e si vorrebbero vedere soppresse in una dimostrazione per renderla più breve, lo sieno realmente, e non abbiano influenza alcuna al retto intendimento delle nozioni seguenti, non è la più facil cosa del mondo, non è quistione da risolversi sul tamburo o al lume dei caffè: essa è quistione che esige tutto quello studio che è necessario perchè chiarissima apparisca alla mente e in tutto il più minuto dettaglio persino dei suoi nascondigli la pianta del vasto edificio, quale dal suo artefice è stata ideata. E quando vi siete bene assicurati se nei corsi voluminosi siavi o no del superfluo, prima di decidervi ad una scelta, guardate poi anche se nei corsi più brevi siavi il necessario. La massima pur troppo invalsa « *Essere il pregio dei libri elementari in ragione inversa del loro volume* » è un falso criterio. Questi giudizi sul merito dei libri basati sulle loro dimensioni sono comodi a dir vero, ma è da dolersi che sieno soggetti a troppe eccezioni; e sul riflesso di queste la tenuità della mole vi ponga anzi in grave sospetto e valga a raddoppiare la vostra attenzione per esaminare se le nozioni più interessanti e difficili piuttosto che spiegate sieno accennate soltanto o tacciute, e se i passi più ardui sieno saltati a piè pari con la massima soddisfazione del pigro o impotente autore e col massimo danno dell' apprendimento, che riesce incompleto e indigesto. In tali casi, e sono pur troppo i più frequenti, la brevità anzichè essere un vero tesoro, è un difetto il più abominevole: essa produce quella oscurità d' idee già dal Venosino preveduta in quella sua pratica avvertenza « *brevis esse laboro, obscurus fio* » e questa oscurità è la causa la più potente di quella superficialità d' istruzione tanto ai nostri giorni dominante e nociva.

28. Ma... ma non usciamo dal seminato, io soggiungo. Mio assunto è stato il dimostrare che nel vecchio insegnamento delle matematiche da taluni ancora seguìto, molti errori ed improprictà sono a correggere: che perciò giustissimi e ragionevoli sono i motivi che mi hanno indotto a fare qualche innovazione nei miei elementi; e non ho già preso a fare di questi l'apologia. Nulla di più facile anzi, che io non sia stato abbastanza chiaro e felice nella esposizione delle nuove mie idee, che il desiderio che venissero queste intese in tutti i loro aspetti, mi abbia talvolta reso prolisso, e che in qualche passo manchi io pure di quella precisione ed esattezza che ho rimarcato in altri corsi mancare. Nulla di ciò più facile al certo, subitochè di alcuni difetti mi sono accorto io medesimo, e tengo già in ordine le mende per una quarta edizione. Io amerò perciò sommamente che altri di maggior vigoria di quella che abbiano le povere mie forze, con modi ben migliori, che per me non si è fatto, si accinga i difetti a correggere, e a supplire ai bisogni, di che fin quì si è fatto parola. Così le opere composte con le indicate intenzioni, e non corrispondente valore, non saranno languide copie di difettosi originali; e prive in tal guisa del difetto che Jacoby dice trovare nella maggior parte dei libri elementari, saranno utili alla istruzione.

29. Un altra parola, e poi cessiamo d' importunarti, immagino che pure mi si dica. Non essendoti accinto ancora a dimostrarci qual peso abbian poi gli errori e i bisogni dei quali ti piacque far motto, toglici di un dubbio, te ne preghiamo: questi errori e questi bisogni sono poi veramente gravissimi? Che non sii tu un delirante ed un sognatore anche in veglia, te l'abbiamo menata buona: e non sarai anche tu condiscendente a concederci di riguardarti almeno per un fanatico innovatore che dei nominati difetti e bisogni ama di esagerare e numero ed entità? Un

Laplace io rispondo, un Poinsot, un Carnot, un Busset, un Romagnosi hanno sul proposito esternato che molti libri elementari sono malfatti, e che è d' uopo rifarli; e una fabbrica non si dichiara bisognosa di ricostruzione per qualche rara pietra mal collocata, o per qualche intonaco non bene levigato che vi apparisca. Errori gravi dunque nell' insegnamento vi sono; e se i nominati Classici che veggono il bisogno di rifar tutto non sono fanatici, molto meno potrò di fanatismo esser io addebitato, che nella mia moderazione stimando non necessario un completo riedificamento, non ho parlato che di correzioni semplicemente.

Tanto per ora in risposta alle obbjezioni che io mi sono studiato di fare contro me stesso. A voi poi caro amico soggiungo che disgustato dei metodi, cominciai fin dai miei più verdi anni delle indicate correzioni a ruminare il progetto. Circa sette lustri già sono scorsi da che vi detti principio, e la coscienza dei motivi che mi hanno a ciò indotto, avvalorata da tanti e tanti anni di rinnovata meditazione, la quale in vece di farmi pentire delle introdotte modificazioni, mi ha sempre più confermata la giustezza delle mie vedute, mi tranquillizza. Di più anzi la speranza pure mi dona che le dichiarazioni e le ragioni che vi andrò esponendo nelle successive nostre conferenze saranno valevoli a trarre nella maggior parte dei miei riflessi al mio partito que' dotti, che senza preoccupazione di spirito per altro non parteggiano che per la verità. E i dotti soltanto io vi nomino, poichè curo ben poco i vilipendi e le punizioni del Mondo che Cantù chiamerebbe *gaudente*, il quale disapprova più per l'intemperante prurito di far eco a chi contradice, che per intima cognizione di causa. Questa cognizione infatti essere non potrebbe che il risultato d' una laboriosa indagine della mente; e la fatica è pianta esotica nei suoi domini.

LETTERA II.ª

Sulla utilita' di una innovazione nelle distinzioni dei numeri.

ARGOMENTO

Il riguardare per astratti i numeri indicanti il *quante volte*, è un errore. Essi non sono suscettibili di esserlo, perchè indicano un oggetto essenzialmente non variabile, non sensibile, non frazionario qu' l' è la ripetizione di un atto (§. 30 al 38). Di quì la necessità della distinzione dei *numeri indicanti gli oggetti* che si sottopongono ad operazioni nel calcolo e dei *numeri indicanti la loro ripetizione* (§. 39 al 42). Questa distinzione si difende dalla taccia di inesatta, di oscura e di inutile (§. 43 al 46) e scherzando si svelano i veri motivi che potrebbero indurre a non adottarla (§. 47).

---

30. Se fra i debiti ogni promessa è da annoverarsi, come lo è certamente, molti ne hò io contratti con voi in grazia della prima mia lettera; e fa perciò d' uopo che con questa seconda io cominci a sgravarmene, accingendomi prima d' ogni altro a dimostrare i vizi dell' insegnamento specialmente nelle scienze esatte, vizi dei maggiori dei quali soltanto io non feci che delinearvi un semplice prospetto (§. 22).

Un grave, gravissimo errore che io trovo nelle preliminari nozioni di tutti que' pochi trattati di Matematica che sono a mia cognizione, errore che mi sembra fin quì inosservato, quasi che tale non fosse, o fosse al più una trascurabile venialità, egli è quello, siccome vi accennai (§. 13) di riferire alla classe degli astratti indistintamente

tutti que' numeri che non precisano qualche specie particolare di oggetti. Io trovo infatti in molti corsi esplicitamente espresso, che come 5 *scudi*, 9 *metri* ec. sono numeri concreti, così il semplice 5, il semplice 9 ec. ed il 5 *volte*, il 9 *volte* ec. sono numeri astratti. Inoltre nella circostanza di fare agli allievi osservare, che per conoscere p. es. quanto importano libbre 3 di zucchero a soldi 7 la libbra, conviene ripetere il soldi 7 tre volte, perchè 3 sono le libbre, io veggo che la comune degl' istruttori dice loro, che quel 3 libbre, essendo passato nella soluzione del quesito ad esprimere *tre volte*, da numero concreto che esso era, è divenuto astratto: veggo in somma che comunemente si suole così ragionare. Il *tre volte*, il *quattro volte* ec. non sono numeri concreti, perchè non esprimono oggetti particolari sottoponibili a qualche operazione nel calcolo: dunque sono numeri astratti. Ma questo dunque è legittimo? Che i numeri 5, 9, senza l' addizione di un sostantivo che determini qualche particolare specie di oggetti, sieno numeri astratti, ella è una verità incontrastabile: che lo sieno il *tre volte*, il *quattro volte* ec. egli è un palpabilissimo assurdo; ed il sostenerlo, sebbene abbia in suo favore l' autorità di molti e sommi Matematici; è un errore così riprovevole, così pregno di nocive conseguenze, che sebbene l' abbia preso ad unico oggetto di questo mio ragionamento, pur non pertanto io credo di non avervi inveito abbastanza e quanto la sua gravezza lo esige.

31. A ben scandagliare l' enormità dell' inesattezza per la quale nella classe degli astratti vengono collocati i numeri indicanti il *quante volte* una grandezza che esprime oggetti viene ripetuta, egli è bene tornare al pensiero il significato filosofico degli aggettivi *concreto* ed *astratto*. L' aggettivo *concreto*, procedente dal latino *concretus* (*cretus cum*) *generato insieme* significa, come bene espo-

ne il Tramater nel suo dizionario, *congiunto insieme al subbietto*: l' aggettivo *astratto*, derivante dal latino *abstractus* (*tractus ab*) vale *separato*, *staccato a forza dal soggetto*. E da queste nozioni ben richiamate alla mente chiaro discende che per *numeri concreti* intendere dobbiamo que' numeri che sono congiunti alla cosa particolare cui si riferiscono, come il *cinque scudi*, il *nove metri*; cosicchè precisano specie e quantità: per *astratti* poi dobbiamo riguardare que' numeri che sono stati staccati da quegli oggetti particolari cui naturalmente appartenevano per essere presi in considerazione nella universalità loro, sicchè ci determinano la quantità, ma riferendola ad una cosa in genere, e perciò senza precisarne la specie. Il fanciullo nelle sue prime indagini sulla quantità osserva p. es. che 7 *uomini più* 4 uomini fanno 11 *uomini*: che 7 *scudi più* 4 *scudi fanno* 11 *scudi* ec. ed ecco i numeri concreti: ma finalmente, rimarcando che la diversa specie delle cose niuna influenza esercita sulle speculazioni di quantità, passa a riguardare l' idea delle specie annessa al numero come cosa estranea ai numerici risultati, che sono sempre identici, qualunque siano i particolari oggetti cui si riferiscono, e perciò come una idea d' imbarazzo da cui giovi il prescindere. E quindi realmente astraendola dai numeri stessi, cui tacitamente la nozione annette, soltanto d' un *quid* in genere, dice $7+4=11$; ed ecco i *numeri astratti*. Ma poichè $7+4=11$ si verifica tanto se si parli di uomini, che di scudi, di metri ec. così ne segue che questa ed ogni altra aritmetica proposizione può dall' astratto in cui per maggior semplicità siamo passati a concepirla, fare alla circostanza regresso al concreto, riferendosi a qualunque sorta o specie di oggetti a che ne chiami il bisogno. I numeri astratti dunque, se ne osserviamo la genetica idea, sono numeri che sono stati tolti alle particolari cose concrete, e conservano in

sè la proprietà di essere riferibili a qualunque di esse più piaccia.

32. Di questo mio elementar modo però di esporvi le cose parmi vedere taluni adontarsi e con isdegno così rimbrottarmi. E che, ti sembra forse tener con i fanciulli parola, che ad un linguaggio ti appigli soltanto ad essi adattato, a spiegare tornandoci le nozioni le più elementari della grammatica e della logica sui nomi concreti ed astratti? — Ed io a cotestoro: sì appunto a voi precisamente sono state dirette quelle definizioncelle del concreto e dell' astratto, perchè veggo che ve ne siete dimenticati; e me ne date prova evidente, allorchè nella classe dei numeri astratti quelli voi collocate che precisano il *quante volte* un numero indicante oggetti è stato ripetuto. Non v' impazientite dunque miei cari: se il mio discorso *serpit humi*, per servirmi della frase di Orazio, non è già il timor della procella, sono i majuscoli errori vostri che mi vi trascinano; *e chi è colpa del suo mal pianga se stesso.* Abbiate perciò sofferenza di abbassare per altri pochi momenti l' alto vostro intelletto anche a questi umili esempi. Quando io ripeto tre volte il 7 soldi, prezzo p. es. di una libbra di zucchero, perchè cerco il valore di libbre 3 ed ottengo soldi 21, questo è un risultato in numeri concreti: passo poi dal concreto all' astratto dicendo che 7 *ripetuto tre volte dà* 21; e poscia di questa verità astratta io profitto in mille circostanze, applicandola ai vari casi particolari dal citato esempio diversi, dicendo che il 7 scudi *ripetuto tre volte* dà 21 scudo; che il *tre volte* 7 metri dà 21 metro; il *tre volte* 7 once dà 21 oncia ec. Ma in questi passaggi dal concreto all' astratto e dall' astratto al concreto, forse tutti e tre i numeri nominati 7, 21, 3 subiscono la medesima modificazione? Nel primo caso io trovo che il 7 ed il 21 che esprimevano soldi, sono passati ad esprimere oggetti in genere, ma il numero *tre volte* è

rimasto identico nel suo primitivo significato, ed egualmente nel caso opposto, nel regresso cioè dall' astratto ai diversi casi particolari concreti variabilissimi. Nel 7 e nel 21 soltanto si verificano dunque le condizioni che caratterizzano i numeri astratti da potersi a qualsivoglia specie applicare, non così nel *tre volte*, che nel caso generico e in tutti i casi specifici diversi precisa sempre *quante volte* e null'altro. Il *tre volte* dunque, non potendo in esso l' aggettivo *tre* essere staccato giammai dal sostantivo *volte* cui irremovibilmente aderisce, non potendo giammai passare ad esprimere altri particolari oggetti in tutti que' casi variabilissimi in cui dall' astratto si torna al concreto, è un numero il quale, anzichè appartenere agli astratti, manca della caratteristica loro propria, e quindi è essenzialmente insuscettibile di esserlo.

33. Ma quale è, mi si potrebbe chiedere il preciso significato di questi numeri *tre volte*, *quattro volte* ec, qual' è l' oggetto preciso da essi espresso e da cui il 3, il 4 ec. non possono assolutamente distaccarsi? Questi numeri *tre volte*, *quattro volte* ec. sono espressioni destinate a determinare la ripetizione di uno stesso atto, qualunque esso sia, indicato da un verbo, ond' è che esse sono formole avverbiali, non distaccabili dal verbo espresso o sottinteso che denota un' azione. E quando questo *tre volte*, *quattro volte* ec. trovasi senza verbo espresso innanzi ad una quantità, siccome l' atto cui può soggiacere una quantità indicata in un calcolo si è d' esser posta o tolta, e se non è espresso che sia tolta, v' è per convenzione sottinteso l' atto del porla, così il numero *tre volte*, il *quattro volte*, ec. che la precede, altro non fa che indicare la ripetizione di quest' atto. Il *tre volte* 7 soldi che abbiamo nel citato quesito, significa che il 7 soldi è posto, che il 7 soldi è posto di nuovo, che il 7 soldi di bel nuovo è posto nel calcolo; e perciò vede ognuno che questo *tre volte*

determina invariabilmente la ripetizione dell' atto del porre i sette soldi, nè ad altro oggetto può riferirsi, siccome sempre il possono i numeri astratti che sono a qualsiasi particolare specie applicabili. L' errore dunque di riguardare il *tre volte*, il *quattro volte* e qualsiasi altro numero indicante la ripetizione di un atto per tanti numeri astratti, è un errore il quale non ha che questo solo piccol difetto, di attribuire ad essi una proprietà incompatibile con la loro natura, non essendo suscettibili di divenire mai ciò che si vorrebbe che fossero.

34. Fu nel meditare su i semplicissimi quesiti che chieggono per essere sciolti la sola moltiplicazione, e non già nello slanciare la mente a trascendentali nozioni, che io mi accorsi di questo incontrastabile errore. E questo sarebbe forse sfuggito anche a me inosservato, se non mi fossi procurato l' abitudine d' istituire fin dove giungono le deboli mie forze, una filosofica analisi delle parole, scandagliandone le idee relative, anche allorquando trattasi delle cose le più semplici e le più elementari. Cattivo preludio io fo di coloro che mostrano avere a sdegno di abbassar di nuovo e più volte il pensiero sulle preliminari nozioni delle scienze. In questo sdegno io ravviso una sorgente pur troppo feconda delle inesattezze che negli scientifici trattati, di generazione in generazione si vanno ereditando. E voi perciò, caro Amico, proseguite nel saggio sistema che avete adottato di ruminare con una riflessione fredda e paziente le cose ancor le più umili; e l' errore, sia pure che tenti di entrar furtivo nei vostri ragionamenti, ben di rado troverà il nicchio ove potersi nascondere. Per aver trascurato le esposte avvertenze io veggo uomini grandi proseguire a coltivare dei pregiudizi perchè li succhiarono nell' elementare insegnamento: tanto è necessario che esso sia sano ed esatto!

E per averlo tale, io mi vo immaginando che con deri-

sione mi si soggiunga, non bisogna allontanarsi dalle norme da Purgotti tracciate, e specialmente nelle scoperte seguirlo che in questa lettera ci svela. Evviva dunque il grand' Uomo! Un trovato veramente sublime, *di poema degnissimo e di storia*, da far epoca nei fasti delle matematiche discipline, che di luce novella farà brillare l' orizzonte scientifico, per suo mezzo ci viene ora annunziato. E che cosa ella è mai questa solenne scoperta? Inarcate le ciglia e stupite. Qualora vogliasi accordargli anche tutto ciò che di provarci egli pretende, la solenne, la grande, la stupenda invenzione consiste nell' essersi accorto della improprietà di un aggettivo che i matematici danno ad una tal classe di numeri!!! L' oggetto vedete è di una importanza che non ha pari. V' è perciò da farne le meraviglie, v' è tutto il pregio dell' opera a formarne l' esclusivo oggetto di una disertazione, e d' una disertazione di tal vaglia da far parte di quelle, cui dà egli il pomposo titolo di *lettere intorno a filosofico argomento*. Egli mostra così la quinta essenza del suo senno: egli merita perciò appunto un brevetto per l' invenzione, o una dichiarazione almeno sulla sua priorità.

Ah! miei Signori, basta non più: che la voga della vostra facondia non v' inaridisca le fauci, tanto più che quello che vi esce è tutto fiato perduto, perchè a dirvela cogliete poco nel segno. La scoperta di cui si tratta è molto utile per lo insegnamento. Io ho fondata speranza di farvelo a momenti conoscere, e da ciò arguite in quanta sfiducia mi pongano le vostre derisioni. Che di questa invenzione poi, per essere facilissima e naturale, sia meschinissimo il merito; e quindi che tutta abbiate la ragione di non dargli valore alcuno, io non so negarvelo: ma non so nemmeno in pari tempo comprendere da che sia mosso quel tanto affaccendarvi per dimostrarne la nullità, se niuno ha mai preteso di contrastarvela. Qualunque giovane di me-

diocre ingegno per poco che abbia sfiorato le prime lezioni della Logica la più elementare, quand' anche non avesse appreso da esse sul concetto del concreto e dell' astratto che quel pochissimo che ho di sopra accennato, se si sia già abituato a non accettar parola senza meditarne l' idea (canone che non cesserò mai di raccomandare perchè in sè accoglie i più validi criteri che l' arte critica la più accurata e sottile può mai suggerire) non potrebbe certamente rimaner soddisfatto allorchè gli s' insegnasse negli elementi di matematica che il *tre volte* è un numero astratto; e facendo i facilissimi sopra esposti riflessi, il patente errore riconoscerebbe e dichiarerebbe pur egli. Che anzi a vieppiù attenuare il merito della scoperta per darvi nel genio, quasi quasi vi accorderei che dell' errore da me avvertito potesse accorgesi anche un fanciullo solche fornito delle nozioni dei nomi concreti e astratti che ha ricevute nelle prime prime istruzioni grammaticali. E se la capacità di un fanciullo puranche fosse valevole a far la scoperta di cui ora parliamo, la quale negar non mi potrete essere all' insegnamento utilissima, e se voi così teneri dei miglioramenti dell' istruzione non siete stati da tanto, quale conseguenza se ne potrebbe dedurre? Io la lascio al lettore benevolo, e voi benevolissimi prego solo ad investigare sopra chi si riverberi l' energico fuoco dei vostri punti ammirativi e delle vostre enfatiche esclamazioni. Ma non ci perdiamo in inezie e proseguiamo le nostre indagini.

35. Per formarci un' idea dei numeri indicanti la ripetizione dell' atto del porre una quantità nel calcolo, io sono partito dall' esempio del *tre volte* che si è ripetuto il soldi 7, onde avere il valore di tre libbre, ho preso le mosse cioè da quel numero che gli Aritmetici chiamano *moltiplicatore*, e finchè ci limitiamo alla pura numerica elementare, non conosciamo altra sorta di numeri che ci

esprima ripetizione. Progredendo però, io trovo gli *esponenti* che indicano *quante volte* una quantità va scritta come fattore, trovo gli indici dei radicali, che ci esprimono *quante volte* debbe esser scritta come fattore la quantità ignota che si ricerca per produrre la quantità che è sotto il segno: trovo il numero dei termini delle progressioni sì per differenza che per quoto, il numero cioè che ci denota *quante volte* è stato ripetuto o debbe ripetersi il primo termine delle progressioni successivamente assoggettato sotto l'impero d'una legge costante ad una stessa modificazione di incremento o di decremento: trovo in somma dei numeri che tutti convengono nell'indicarci un quante volte; ed essendo essi indissociabilmente uniti a questa idea, nè potendosi ad altra applicare, sono tutti, siccome esperimenti una cosa invariabile, essenzialmente non suscettibili di essere numeri astratti.

36. Nè da questi differiscono in ciò solamente. Meditando infatti sulle intrinseche proprietà comuni a tutte le ora esposte diverse specie di numeri indicanti ripetizione, e su quelle dei numeri astratti, un'altra rimarchevolissima differenza ci si manifesta. Ed in vero le diverse cose cui si riferiscono i numeri astratti, qualunque esse sieno, (meno qualche rarissima eccezione) o sono oggetti materiali come scudi, frutti ec. o sono oggetti rappresentabili per qualche qualità sensibile e misurabile della materia, come la forza e la velocità, che si valutano per mezzo della estensione, o come la gravità e la densità, che si valutano per mezzo della estensione e del peso: e chiamando perciò gli uni e gli altri oggetti col nome di *sensibili*, può dirsi che i numeri astratti esprimono cose in genere, che nella massima parte dei casi particolari si applicano ad *oggetti sensibili*. D'altronde i numeri indicanti ripetizione non esprimono affatto cosa che cada sotto i sensi, perchè se sono ai sensi soggette le cose che si ripetono, non lo è

al certo l'atto del porle, la cui ripetizione è l'unica ed esclusiva cosa che quei numeri esprimono.

37.' Finalmente altra differenza io trovo meritevole di sommo rimarco fra i numeri astratti e i numeri indicanti ripetizione. I numeri astratti esser possono interi e frazionari perchè interi e frazionari esser possono i numeri concreti da cui essi sono tolti e in cui si convertono. A meno in fatti del caso rarissimo che i numeri concreti esprimano complessi di unità indivisibili, nei casi comuni gli oggetti sensibili cui si applicano le speculazioni di quantità, offrono sempre una unità di misura divisibile in parti, donde la possibilità delle sue frazioni. I numeri poi indicanti ripetizione sono essenzialmente interi, poichè l'atto del porre una cosa che costituisce l'unità di questa sorte di numeri è un oggetto non già materiale e spezzabile, ma nemmeno concepibile fornito di parti, egli è un atto individuo, decisamente integrale, una unità di quel genere, che può ripetersi quante volte ei piaccia, ma non già suddividersi. Essa è *una* a stretto rigore di termine, e perciò non suscettibile di frazione. Ed in vero in vece di una cosa possiamo noi prenderne una metà, un terzo, due quinti, ec.: quello però che abbiamo divisato di prendere, sia un intero sia una frazione, bene intende anche un fanciullo che noi potremo ripetere una volta, due volte, tre volte..., ma una *mezza volta*, un *terzo di volta*, due *quinti di volta* non certamente.

38. I numeri astratti dunque possono riferirsi a cose differentissime, i numeri indicanti ripetizione indicano sempre una cosa stessa invariabile: i primi nella massima parte dei casi si applicano ad oggetti sensibili, i secondi esprimono sempre e senza eccezione un atto che non è ai sensi soggetto: quelli esser possono interi e frazionari, questi essenzialmente interi. E dopo questo minuto dettaglio di osservazioni, bisognerebbe rinunciare alla logica naturale per sostenere che

i numeri indicanti ripetizione possono essere collocati nella classe dei numeri astratti. Riflettendo poi che nemmeno appartener possono a quella classe di numeri concreti indicanti gli oggetti che si sottopongono ad operazioni nel calcolo, perchè non di questi esprimono un complesso, ma un complesso di atti, ossia la ripetizione d' un atto stesso, fu ben naturale che per dare a questa sorta di numeri una collocazione, io sentissi la necessità d' introdurre negli elementi della scienza delle quantità una importante distinzione.

39. Tutti i numeri in prima origine sono concreti perchè annessi a qualche oggetto particolare che il bisogno ci reca ad enumerare, e quindi concreti sono pure i numeri *tre volte*, *quattro volte* ec. perchè annessi anche essi ad un particolare oggetto qual' è l' atto di cui essi indicano la ripetizione (1). Sebbene però concreti pur essi come tutti

(1) Allorchè nella prima e seconda edizione de' miei elementi io mi feci a porre questa distinzione dei numeri che si assoggettano ad operazioni, e dei numeri indicanti la loro ripetizione, io caddi in un errore del quale fu causa il non aver posta bastante attenzione al significato d' una parola. L' abitudine contratta di osservare che i numeri concreti sono quasi sempre numeri indicanti oggetti sensibili, mi portò a riguardare come sinonimi il *concreto* ed il *sensibile*; ed ammessa questa inesattezza (vedete quanto facilmente un errore fa strada ad un altro) io riguardai i numeri indicanti ripetizione come *essenzialmente non concreti*, intendendo con ciò di significare che erano numeri essenzialmente non sensibili. Il mio concetto era giusto, ma era malissimo espresso. Anche il *tre volte* infatti, sebbene non indichi oggetti sensibili, è un numero concreto, poichè l' idea del tre é congiunta ad un particolare oggetto qual' è l' atto del porre una cosa espresso dalla voce *volte*. Un Giovane di bell' ingegno e di molte cognizioni fornito il Sig. Luigi Giacomini Professore di Matematica nel Liceo di Rimini, mi avvertì dell' errore. Scrivendomi in data del 6. Giugno 1843 egli mi fece riflettere che oggetti concreti sono anche i nostri modi, i nostri atti ec., e quindi disapprovava che i numeri indicanti ripetizione si riguardassero per essenzialmente non concreti. Io apprezzai sommamente questo giusto e saggio riflesso, e di questa savissima critica profittando, tosto nella terza edizione corressi il mio errore, e sarò gratissimo a tutti quelli che di altri pure mi faranno avvertito.

gli altri, troppo salienti, troppo appariscenti mi si addimostravano dopo gli esposti riflessi le discrepanze per le quali da tutti gli altri distinguonsi, perchè sentissi la necessità di separarli, e far quindi per rapporto ai numeri che occorrono nelle operazioni del calcolo questo primitivo e solenne riparto, dei numeri cioè indicanti quegli oggetti i quali nel calcolo sono posti o tolti (e nella massima parte dei casi sono oggetti sensibili) e di quelli indicanti un oggetto pur essi, ma non variabile, non sensibile, mai frazionario, qual'è la ripetizione dell'atto del porre o togliere i numeri sopra indicati.

40. E questo riparto primitivo e solenne facilissimamente viene appreso dai Giovanetti appena che la loro riflessione sia portata sopra un semplicissimo caso di moltiplicazione, sulla ricerca per es. dell' importo di libbre 3 di zucchero a soldi 7 la libbra, giacchè occorrendo di dover ripetere il 7 soldi *tre volte*, non riesce certamente difficile il far loro concepire che vi sono dei numeri indicanti gli oggetti sensibili come il 7 *soldi* che fa duopo assoggettare a qualche operazione e nel nostro caso ad essere ripetuti, e vi sono altri numeri determinanti questa ripetizione, sicome è il *tre volte*. E basta il citato esempio perchè la distinzione sia bene afferrata dai Giovanetti, quantunque essi ignorino che gli esponenti e gli indici dei radicali, ec. dei quali non hanno affatto idea appartengono a questa classe.

41. Sì chiara in vero e sì naturale, e sì facile a saltare agli occhi di chicchessia a me sembrò la sopranominata distinzione, che io ho stimato utilissimo porla alla testa delle ripartizioni dei numeri fin dal primo ingresso degli Allievi nel vestibolo delle Scienze esatte. E sebbene non trovisi nei trattati di Aritmetica e di Algebra, pure avrei voluto persuadermi che fosse da tutti ammessa, e fosse non espressa, sol perchè creduta facile ad essere sottintesa: ma aperte prove del contrario mi danno quegli errori che pur

troppo seminati si trovano nelle opere di matematica, e che sono l' effetto appunto del non averla avvertita ed apprezzata. Ciò non ostante altro merito io non voglio appropriarmi che quello di averla posta nei miei elementi in un miglior punto di vista e risalto.

42. Anzi perchè questa mia distinzione abbia a trovare un minor numero di oppositori, io azzarderei anche di dire che essa non è una novità, che all' opposto è tanto vecchia quanto vecchie sono tutte quelle lingue che ce la fanno marcare. E per limitarmi alle sole quattro di cui ho qualche cognizione, la quale comechè leggerissima, pur basta all' uopo, dirovvi che la lingua italiana e la francese non fanno tanto apertamente sentire la differenza fra le due distinte classi di numeri come la latina e la greca, perchè le stesse voci *tre*, *quattro*, ec. *trois quatre* ec. che sono impiegate come aggettivi nell' espressione delle diverse cose (*tre lire*, *quattro lire*, *trois livres*, *quatre livres*, *tre frutti*, *quattro frutti*, *trois fruits*, *quatre fruits*) sono impiegate pur anche nell' espressione *tre volte*, *quattro volte*, *trois fois*, *quatre fois*, sembrando, anzi essendo anche in questo caso, aggettivi aggiunti al sostantivo *volte*, o *fois*. Ciò non ostante però apprende ognuno dalla grammatica che quelle espressioni *tre volte*, *quattro volte*, *trois fois quatre fois*, quantunque aggettivi uniti al sostantivo, sono *formole avverbiali*, equivalenti cioe ad un avverbio, e ciò basta perchè sieno distinte dai veri aggettivi *tre*, *quattro*, *trois*, *quatre*. Le lingue latina e greca poi con maggior concisione e più espressivamente ci fanno marcare la differenza accennata. In fatti quando esse usano gli aggettivi *tria*, *quatuor*, *ta tria*, *ta tettara*, ai quali niun sostantivo è aggiunto, vi si sottintende una cosa in genere, e sono perciò indicazioni di numeri astratti sottoponibili ad operazioni: quando esse usano le espressioni *ter*, *quater*, *tris*, *tetrachis*, espressioni nelle quali è modificata la de-

sinenza delle voci radicali dei numeri, queste ci si appalesano tosto per *avverbi*, e significano numeri indicanti la ripetizione di un atto. Ed in vero se gli avverbi sono principalmente diretti ad aggiungere qualche modificazione al verbo, siccome appunto la loro denominazione (*ad verbum*) significa, e se la modificazione che può esprimere un avverbio di numero non è che ripetizione; i numeri avverbialmente posti innanzi ai numeri indicanti oggetti non possono esprimere che la ripetizione dell' atto del porli, non potendo esser altro (§. 33) che quest' atto del porre, l'azione espressa dal verbo ivi sottinteso, che in grazia dell' avverbio di numero subisce la modificazione di esser ripetuta. Conchiudo dunque che se le lingue ci offrono nelle voci dei numeri due distinte modificazioni, con queste esse ci additano il bisogno in cui la nostra mente si trova d' indicare due cose distintissime, l' una per mezzo dei numeri aggettivamente posti, l' altra per mezzo dei numeri posti avverbialmente. Se come *aggettivi* applicati sono a sostantivi espressi o sottintesi, ecco i numeri indicanti oggetti, e questi o concreti (*tre scudi*, *quattro scudi*) od astratti (*tre*, *quattro*). Se come *avverbi* sono i numeri applicati ai verbi o espressi o sottintesi, ecco i numeri indicanti la ripetizione di un atto (*tre volte*, *quattro volte*). Ora se le lingue con la diversità delle voci ci obbligano ad ammettere la distinzione primitiva e solenne che io ho annunziata, se con lo esprimere i numeri o aggettivamente o avverbialmente offrono ai principianti anche un criterio per riconoscere se dessi appartengano all' una o all' altra delle distinte due classi, s' impegnino i Matematici pur quanto vogliono a porre tutti in un fascio medesimo tanto il *tre* che il *tre volte*; tanto il *quattro* che il *quattro volte*, considerandoli indistintamente per tanti numeri astratti, che contro avranno sempre il buon senso non solo, ma il senso comune. Quando le esigenze della mente comandano che si

distingua, pongano eglino pure tutto il grave della loro autorità per opporvisi, i loro sforzi riesciranno sempre inutili. A questi imperiosi bisogni non si resiste, e contro le innovazioni che immediatamene ne derivano si chiacchiera invano.

Io son lieto di essere tornato su questo argomento per iscrivervi in proposito, giacchè a questa circostanze io debbo l'osservazione che vi ho ora esposto intorno alle lingue. Questo riflesso sebbene naturalissimo, sebbene tale che ognuno direbbe « *anch' io la pensava così* » pure non prima d'oggi mi era giammai corso col pensiero nelle tante volte che io era tornato a meditare sopra le attuali materie, e mi è grato trovarvi un validissimo sostegno alla mia innovazioue. E dopo che la mente ha meditato lungo tempo su qualche nuovo concetto, dopo che la mente tornatavi sopra freddamente, e più volte, scorso essendo pur anche più del novennio dal Venosino prescritto, in seguito di lunghe ed analitiche investigazioni abbia, anzichè motivi di esitanza, trovato in vece altre prove novelle che le confermano la giustezza di sue vedute, dovrà rifiutarle? Ora in tale stato di cose, supponete che questo nuovo concetto frutto di molti anni di fatiche e di studi, fosse da Cinici anche dotti e valenti, sol perchè nuovo posto in dileggio e rigettato ad un tratto non appena ad essi proposto, e senza che degnati neppure si fossero di contrapporre ai molti giorni di travaglio per parte dell' inventore pochi secondi almeno di ponderazione per parte loro, in tali incidenze, se mai per avventura accadesse che questi subitanei attacchi di critica piuttosto che sensi eccitare di rispetto nell' animo dell' autore, nel suo labbro invece facessero spuntare un sorriso, potrebbe ciò imputarglisi come riprovevole effetto del basso suo sentire per l'altrui e del troppo suo sentire di se? No: l'umiltà in questi casi sarebbe affettata, sarebbe doppia superbia, sarebbe un insulto alla

candida ingenuità. Quì non vi è via di mezzo. O conviene professare lo scetticismo (ed io non debbo e non voglio dubitare di tutto) o bisogna ammettere uno stato della mente in cui senza tema di orgoglio possa uno dire: le mie espressioni saranno rozze, prolisse, piene, riboccanti di tutti que' difetti che voi volete, ma le mie idee sono giuste. Vi piovano pure addosso gli acuti strali di mille Mevi, di mille Aristarchi, v'è un egida invincibile che li rintuzza, lo scudo della verità. E da questo scudo protetta io veggo la distinzione di che ho fin quì ragionato, cosicchè in seguito di tutto cio che vi ho esposto, conchiudo che dessa I è *esatta*: II è *adattata alla intelligenza degli Allievi* fin dai primi loro passi nello studio dell' Aritmetica: III è ben *utile*. Ed in vero, comechè non abbia potuto ancora mostrarvi base esser essa a molte rettificazioni di idee nelle matematiche e fisiche dimostrazioni, lo che di fare in seguito io spero, pure il solo servigio che essa presta all' istruzione, l' errore eliminando, siccome ho dimostrato, di riferire alla classe degli astratti i numeri indicanti ripetizione è bastevole a farne riconoscere la utilità.

43. Eccovi esposti i motivi tutti e le prove che mi sono occorse alla mente in favore di quella distinzione sui numeri, di cui si è fin quì parlato, e che da 18 anni a questa parte io resi con la stampa dei miei elementi di pubblico diritto. Permettetemi ora che io per un logico esercizio sponendo e confutando vi vada in pari tempo tutte le più lambiccate obbiezioni che fantasticando ha il mio pensiero ideate come possibili ad essere addotte da coloro, presso i quali qualunque innovazione è una colpa.

Come, io ora immagino che così mi vadano sferzando, come tu dunque pieno di baldanza e di orgoglio hai la folle pretensione di credere che la tua distinzione sia fornita dei tre accennati requisiti di esattezza, chiarezza, ed utilità? *Vedi il giudizio uman come spesso erra!* Essa non ne

possiede veruno perchè *inesatta*, *inintelligibile agli allievi* ed *inutile*; e tosto alle prove.

44. E I ti dimostriamo che è *inesatta*. Una distinzione in vero perchè sia di esattezza fornita, esige che siavi tal linea di demarcazione fra le cose distinte che non permetta giammai che le cose appartenenti ad un rango possano talvolta aver posto nell'altro. Duopo sarebbe perciò che i numeri indicanti ripetizione costituenti una classe, giammai potessero essere riguardati per numeri indicanti oggetti sottoponibili ad operazioni che costituiscono l'altra. Eppure vediamo che qualche volta il possono essere. Ed in vero nella proposizione « *si prende tre volte il cinque volte* 4 » *il cinque volte* 4 è l'oggetto che si ripete: quindi il *cinque volte*, sebbene numero indicante ripetizione, fa parte della cosa che si ripete tre volte, e quindi ecco a terra la tua pretesa esattezza — Ma se argomenti di maggior vaglia non vi si presentano, o miei Signori, il solo riflesso che si può ripetere tre volte il *cinque volte* 4 *scudi*, ma non già il solo *cinque volte*, perchè in questo caso mancando l'oggetto che si debbe ripetere, la ripetizione per sè non si regge, bastar dovrebbe a convincervi che siete in inganno. La cosa che vogliamo ripetere tre volte, e che le tre volte ripetuta ci dà 60, non è a rigore il *cinque volte* 4, ma è il 20, giacchè non giungiamo ad ottenere il prodotto 60, finchè non si conosce che è 20 la quantità che debbe ripetersi tre volte, finchè cioè non siasi anticipatamente eseguita cinque volte la ripetizione del 4. L'espressione dunque « *si prende tre volte il cinque volte* 4 » significa, che si deve ripetere tre volte il 20 risultato dall' aver ripetuto cinque volte il 4, ci mostra cioè che il numero 20 che ripetiamo tre volte, è stato esso stesso il risultato di una antecedente ripetizione, ma non già che il numero cinque volte indicante ripetizione, passi mai a far parte dei numeri, o divenga numero esprimente gli oggetti che si ri-

cercano, siccome v' era venuto il ghiribizzo di farmi credere.

Ma gli oppositori non si sgomentano per questo, e m' incalzano dicendo: se la tua distinzione non può per l' esposto titolo dichiararsi inesatta, non potrai certamente negarci, che per tale condannarsi non possa, allorchè ti dimostriamo non potere competere alla idea dei numeri indicanti ripetizione quel carattere d' invariabilità pel quale principalmente tu li distingui dai numeri astratti a qualunque particolare oggetto applicabili: Questa distinzione non sussiste affatto, risultando a piena evidenza che i numeri indicanti ripetizione sono pur essi variabilissimi perchè spessissimo accade, che i numeri indicanti *volte* si trasformino in numeri concreti e variabili allorchè sciogliamo i quesiti. E per esempio uno prendendone che abbia analogia al semplicissimo che poco addietro tu ci esponesti, se ci facciamo a cercare quante libbre di zucchero, quante braccia di nastro ec. possono acquistarsi con soldi 21, posto che una libbra od un braccio importino soldi 7, noi rileviamo tosto che potremo acquistarne tre libbre, tre braccia ec. perchè il 7 è contenuto tre volte in 21. Il *tre volte* dunque trovato in virtù della divisione si trasforma in un numero concreto e variabile, in tre *libbre* in tre *braccia* ec. a tenore del particolare quesito che venga proposto. Dunque anche i numeri indicanti ripetizione si trasformano in concreti, siccome gli astratti, e quindi questo epiteto di astratto che fin quì si è dato dai Classici (i quali dovresti un poco più rispettare) epiteto che tu tanto ti affanni per sostenere che dar non si debbe, loro compete benissimo, e quella caratteristica d' invariabilità di significato che ci vantavi è un deciso tuo sogno.

Ed io: vi sarebbe mai il caso che desti fossero gli occhi miei e che voi piuttosto soffrendo di sonniloquio sognaste in mia vece tutt' ora? Io non trovo nè piè, nè ca-

po nelle vostre espressioni, che *veluti aegri somnia* ora avete accozzate, confondendo i numeri su cui cadono le operazioni, che sono quelli di cui noi parliamo, con i numeri indicanti gli oggetti che presenta il quesito, alla soluzione del quale le operazioni sono dirette. Dalla fusione di queste due sorte di numeri sarebbe mai accaduto che avesse avuta origine quella metamorfosi dei numeri indicanti ripetizione in numeri indicanti oggetti sensibili e variabili che ci avete sopra improvvisata? Stropicciatevi bene gli occhi, scuotetevi bene dal sonno, ed allora vedrete che i numeri indicanti gli oggetti che può presentarci un quesìto sono bene a distinguersi dai numeri indicanti quegli oggetti su cui si agisce o nell' unica operazione o in ciascuna delle operazioni che facciamo per giungere alla soluzione. I primi possono essere molti, e vari di essi esser possono tra loro eterogenei; mentre in qualunque operazione che si eseguisca, altro non abbiamo che *numeri concreti omogenei*, e numeri indicanti il *quante volte*, come meglio a suo luogo. Se nell' esposto quesìto io deduco che con soldi 21 posso comprare *tre libbre o tre braccia* perchè giungo a conoscere che soldi 7 valore di una libbra o braccio è contenuto *tre volte* in soldi 21, questa deduzione potrà mai indurmi ad inferire (qualora io non sogni) che il *tre volte* ha cambiato natura, ed è divenuto *tre libbre*, *tre braccia*? La proposizione aritmetica « il 7 in 21 è contenuto *tre volte* » risultato di una divisione semplicissima, è sempre vera, comunque si cambino gli oggetti cui si applica il 7 e il 21; ma il *tre* che indica quante volte il 7 è contenuto in 21 non può cambiar mai. Se anche esso passasse ad indicare un oggetto sensibile, cesserebbe la indicazione dell' operazione accennata appunto dal *tre volte*, e si avrebbero tre numeri slegati non indicanti alcun giudizio. Altro è dir dunque che l' ottenuto *tre volte* mi dà motivo a conchiudere che le libbre o le braccia con-

prate sono tre, altro è dire che il *tre volte* si trasforma in *tre libbre* o in *tre braccia*. Se ciò fosse, converrebbe si potesse dire che il *7 soldi è contenuto tre libbre o tre braccia in* 21 *soldi*; e queste parole non risvegliano al certo alcun concetto nemmeno a chi sogna. Or che si dica in senso translato che il *tre volte* risultato dell' operazione si trasformi in *tre libbre* o in *tre braccia*, ec. alludendo alla coincidenza del quantitativo, e alla dipendenza di un numero dall' altro, egli è questo un lecitissimo parlar figurato: ma che voi sognando vogliate a questa *figurata trasformazione* applicare il senso rigoroso della parola, colla mira di provare così che i numeri indicanti ripetizione non hanno il carattere d' essere invariabili nella cosa che indicano, io non vi rimprovererò, perchè in sogno gli errori non sono imputabili, ma vi dirò, svegliatevi cari miei e vedrete che due cose diversissime in natura non possono l' una divenir l' altra sol perchè convengono nel numero: *tre volte* e *tre libbre* non sono la stessa cosa perchè entrambe son tre: svegliatevi bene miei cari, e vedrete che il dedurre un numero da un' altro, che è l' unica cosa che facciamo nell' applicare il risultato dell' operazione al quesito, non è un transustanziare il primo nel secoudo. Quella deduzione è una pura operazione della mente e basta ad ottenere la cosa che si ricerca: la transustansazione richiede il miracolo, e di miracoli non ha d' uopo la soluzione del problema. Non può dunque revocarsi in dubbio che i numeri indicanti ripetizione designino un oggetto invariabile, siccome dimostrammo, ed il sogno, Signori, è tutto vostro e non mio.

45. II. La tua distinzione mi replicano è *inintelligibile agli Allievi* e specialmente nelle prime lezioni del corso, nelle quali tu appunto la raccomandi. E come pretenderesti che quelle tenere menti potessero intenderla? E non sarebbero esse da te assoggettate, o disumano, ad una inutile tortu-

ra, se esporre volessi loro nelle preliminari nozioni i numeri indicanti ripetizione? Limitando anche al solo moltiplicatore l' idea di questi numeri, vorresti della idea del moltiplicatore far uso senza avere esposta prima la teoria della moltiplicazione? Questo è appunto ciò che chiamasi porre il carro innanzi ai buoi e scrivere espressamente per non essere intesi.

L' avvertenza di non porre il carro innanzi ai buoi, io rispondo, e di non trattare materie per la cui intelligenza occorrono idee non digeribili ancora dall' allievo immaturo, è commendevolissima, e l' ho sempre in tanto pregio tenuta, che altra non avvene che io nello scrivere mi sia impegnato di costantemente tenere innanzi agli occhi. Per tale oggetto ho sempre procurato di obbedire a quel saggio precetto che impone agli scrittori dei trattati elementari di situarsi nelle ristrette scientifiche vedute nelle quali si trova l' allievo, e di non far quindi uso per la dimostrazione delle cose, che delle nozioni ed idee solamente che sappiamo aver egli, facendo affatto astrazione da quelle che noi abbiamo oltre le sue. Questa astrazione non è però la più facil cosa del mondo. Essa esige il massimo raccoglimento, e la massima circospezione, la quale principalmente consiste nell' esaminare ad una ad una tutte le idee elementari che costituiscono le nozioni composte, le quali si vanno nella spiegazione esponendo, giacchè è così più facile l' avvedersi se ognuna di esse sia già stata o nò all' allievo sviluppata abbastanza. E la meditazione in questo esame d' uopo è che sia somma, ben difficile essendo che chi all' apice si trova di un' alta montagna con l' immaginazione già pregna delle pittoresche vedute e delle valli alternate dai colli e dai piani, e dei prati e delle vigne e dei castelli e delle città sottoposte e comprese nell' ampia cerchia di quell' ameno orizzonte, possa nel fare qualche descrizione limitarsi a quanto cadeva sotto i suoi occhi nel

breve raggio visuale in cui, prima di salire per l'erta, si aggirava il suo sguardo. E siccome molti Scrittori specialmente di corsi elementari, appunto per aver fatto uso di qualche idea acquistata alla vetta, e di cui erano privi allorchè percorrevano le pendici del monte sublime della Sapienza, veggo peccare di oscurità nella communicativa, così temo io pure, sebbene tutt' altro che alla cima mi trovi, d' essere talvolta e malgrado le praticate cautele, caduto nello stesso difetto.

Le vostre avvertenze perciò di non porre il carro innanzi ai buoi, torno a ripeterlo, sono commendevolissime... — E non è poco che ci dai una volta ragione, mi replicano. Ma non cantate ancora vittoria, io soggiungo, perchè sono commendevolissime, vi diceva, ma non sono opportune, sono belle, son buone, *sed nunc non erat his locus*, giacchè sappiate che nel particolare caso di che si tratta, i buoi bene appajati se ne stanno innanzi al carro, e senza conquassarlo lo tirano, se ben lo vedeste, con tanta regolarità che è una meraviglia. Il pretendere che per fare acquistare agli Allievi l'idea dei numeri indicanti ripetizione sia d' uopo far sì che prima essi apprendano la teoria almeno della moltiplicazione, sarebbe una vera balordaggine. Anche il più rozzo ingegno che giammai abbia veduto il frontispizio di un Aritmetica, che nemmeno anzi sappia leggere, non ha certamente d' uopo d' idee preparatorie per comprendere che bisogna ripetere tre volte il soldi 7 valore di una libbra affine di avere il valore di libbre tre, e per comprendere che come il numero 7 indica gli oggetti che si debbono ripetere, il tre determina quante volte vanno ripetuti, sicchè il primo gli dà tosto l'idea dei numeri indicanti gli oggetti su cui si opera, e il secondo l' idea dei numeri indicanti la loro ripetizione. E per intendere tutto questo, non gli è necessaria la cognizione della moltiplicazione, non gli è necessario il sapere che quel *tre volte* ha ricevuto dai

Trattatisti il nome di *moltiplicatore*. Io vi dirò ancora di più, che anche allorquando siamo al punto di dovere agli Allievi insegnare l'operazione della moltiplica, giova non già stabilir prima cosa è il moltiplicatore, e il moltiplicando e poi passare agli esempi, ma in vece giova muovere dagli esempi che ci additano il bisogno di ricorrere alla operazione, sicchè quasi apparisca che i suoi processi nascano sotto le nostre attuali investigazioni, e sieno come una scoperta fatta allora dagli Allievi medesimi. La chiave per aprire l'adito ai concetti ed alle idee generali, che che su di esse teorizzino le scuole antiche e moderne, ritenetelo come una verità comprovata da una lunga sperienza, egli è l'insinuàrsi con la esposizione di qualche caso particolare che al vergine intelletto faccia la rotta, sicchè cammini a piè franco nel sentiero che al mare conduce delle teorie universali, e non si slanci nei primi momenti di un tratto in quel pelago smisurato delle astrazioni, ove non avvezzo farebbe sicuro naufragio. Questi sono i mezzi più idonei per acquistare il dono della communicativa, e siate certi che la mia distinzione data pure a principio, non vi si oppone e non può generare difficoltà. Quindi io vi prego a non colorire con la giusta avversione che debbe aversi alla introduzione nei corsi elementari di idee che astruse ed oscure si presentano al giovanile intelletto, la ostinata e riprovevole avversione che voi avete per le utili novità.

E sapete poi, caro amico, chi sembra a me che sieno cotestoro che tanta cura e pensiero si danno perchè agiatissima e piana riesca alla gioventù la intelligenza delle prime nozioni di Matematica, e che per ciò appunto dicono di astenersi dall' accettare la mia distinzione? Sapete chi sono cotestoro i quali l'ostentata temenza ci mostrano che gli Allievi non abbiano tanta suscettibilità d'intendere che i numeri indicanti gli oggetti che vanno ripetuti non deggiono confondersi con quelli che indicano ripetizione, e che

mentre i primi possono essere frazionari, sono sempre interi i secondi? Sapete voi chi sembra a me che sieno cotestoro in apparenza si teneri della chiarezza dello insegnamento, e quindi del profitto della studiosa gioventù? Quei medesimi (ed osservate bene quanto sieno coerenti a sè stessi) que' medesimi i quali per non discostarsi dalle orme del vecchio insegnamento pochi mesi dopo espongono agli Allievi (e perciò mostrano di supporre in essi la suscettività di comprendere e di gustare) le seguenti proposizioni » *che vi sono quantità minori di zero* » *che il* — 5 *è una quantità maggiore di*—6 » e simili vezzosi paradossi, di cui come di preziose gemme vediamo gremiti e vecchi e non vecchi trattati di matematica e dei quali a suo luogo.

Ma gracchia pure quanto tu vuoi contro gli antichi metodi dell' insegnare, immagino che tornino a dirmi, noi ti confutiamo con le tue armi medesime. Ed in vero se tu per darci bene ad intendere la malaugurosa tua distinzione hai dovuto fin quì trattenerci con la prolissa tua lettera ed entrare in qualche veduta metafisica, e scrutinare per fino i diversi modi dalle varie lingue usati per esprimere intorno ai numeri le esigenze della mente, la tua innovazione bisognosa di tutti questi puntelli e sussidi per essere intesa, non è dunque la più facil cosa del mondo: ed è mai possibile che intorno a tutto ciò possano tenerti dietro i teneri giovanetti?— Ed io: ah! se così date termine ai vostri riflessi diretti a dimostrare la non intelligibilità della mia distinzione, o voi avete il dono felicissimo di non intendere un acca, e quindi di non discernere ciò che in questa mia è diretto agli intelligenti, e ciò che agli Allievi, o voi soffrite di sì potenti distrazioni allorchè ascoltate o leggete, da perdere con facilità il filo del ragionamento; ed in così disgraziata situazione, affinchè le perdite dei concetti che nel vostro distrarvi hanno luogo, non sieno perdite di gran valore, sicchè da esse grave danno non ne riceva

la mente, lasciate, carissimi, le filosofiche discussioni: esse non fanno per voi: voi siete tagliati piuttosto per la storiella e pel romanzetto.

46. III. Ma sia pure, proseguono ad insistere, sia pure che la tua distinzione tacciare non la si possa nè d' inesatta, nè di oscura o precoce: non potrai almeno negarci che non sia *inutile del tutto*; e le prove che ne adduciamo non hanno replica. Consulta tu le antiche Aritmetiche, prosegui in seguito ad esaminare i trattati di Algebra da Diofanto a Newton, e da Newton a noi, da quando cioè la Scienza era bambina sino al momento in cui cominciò a dilatarsi e poscia sino ai giganteschi progressi che ha fatto fin qui, non troverai veruno che ti faccia la distinzione dei numeri indicanti oggetti suscettibili di essere sottoposti ad aumento ed a diminuzione nel calcolo, e dei numeri indicanti la loro ripetizione. Questa non può dunque a meno di essere inutile. Il loro ragionamento può così formularsi. *Tutte le distinzioni che sono utili all' insegnamento sono poste dagli Scienziati profondi nei loro trattati: ma la distinzione sopra accennata non trovasi: dunque essa non è utile all' insegnamento.* Concessa questa conseguenza, i modi amplificativi per darle il maggior risalto possibile sono ben pronti — Se non è utile, si aggiunge, a che pro inserirla se non proprio ad oggetto di confonder la mente? A che con tante inconcludenti distinzioni e suddivisioni ridurre a tritume, e quasi in polvere per servirci della frase di Seneca le materie degli scientifici trattati, e far così perdere in inezie quel tempo che potrebbe essere impiegato in utili cose? Quel Purgotti sarà buono e bravo (al che io replicherei con la mia ingenuità, meno, ma assai meno di ciò che molti credono, e forse un pochino più di quello che credete voi) quel Purgotti si fa spesso predominare da quel prurito di singolarizzarsi con qualche novità, e cade poi in vanissime sottigliezze, ed una appunto di queste è la distinzione che come inutile abbiamo ora rigettata.

Ma se non sono che un prodotto della mia fantasia le esposte riflessioni che io ho immaginato potersi addurre contro l'utilità della distinzione da me introdotta, è poi una realtà che a favore di essa opinino molti dotti, i ragionamenti dei quali possono così formularsi. *Utile è sempre una distinzione che porta a correggere un inveterato errore che si era introdotto nella scienza: ma la sopracitata distinzione ciò appunto produce: dunque essa è utile*. Ed in vero quello stesso Professor Giacomini che ebbe la gentilezza d'avvertirmi dell'errore in cui mi trovava siccome in nota ho addietro accennato, così dava termine alla sua lettera parlando della distinzione di che si tratta « *Questa è veduta classica e fondamentale che* ec. » E uno fra i molti e degnissimi Allievi del Chiarissimo Padre Inghirami il Prof. Magherini mi significava che colpito dalla novità di questa mia distinzione e molto soddisfatto pei filosofici sviluppi delle sue conseguenze, fu mosso ad adottare per testo delle sue lezioni nel Collegio di Urbino i miei elementi di Matematica.

Una stessa distinzione dunque giusta la maniera di vedere di alcuni è una inutile sottigliezza, giusta quella di altri è una veduta classica e fondamentale. Qual dei due partiti ha ragione? Io non seguirò il contegno di Kant che per favorire il Pirronismo nelle sue quattro da lui chiamate Antinomie della ragione pura, dopo aver ragionato *pro* e *contra*, lascia la questione indecisa, ma soggiungerò tosto che la buona Logica c'insegna a preferire agli estrinseci gli argomenti intrinseci che la forza annullano dei primi; e se la minore dell'ultimo ragionamento è tale che non possa negarsi, se realmente sia vero che la distinzione da me prodotta valga, siccome io credo d'aver dimostrato, a togliere l'errore di riguardare per astratti i numeri indicanti ripetizione, la conseguenza è innegabile, la distinzione sarà sempre utilissima, sia pure che ai sommi Matematici non sia venuta in pensiero.

Ebbene: concediamo, ci si potrebbe soggiungere, che i numeri indicanti ripetizione non possano dirsi astratti a rigore, e che la citata distinzione tolga questa leggera inesattezza: ma perchè tanto scalpore, tanto schiamazzo per una semplice improprietà di espressione, e tanto elevare a cielo quella distinzione che a sì piccolo inconveniente porge riparo? Fatta astrazione da questo lieve vantaggio, quale altro utile vero e grande la detta distinzione può mai procurarci? — Molti e ben molti io spero di enumerarvene nelle seguenti mie lettere — Ma a dirtela in confidenza noi alle tue assertive non crediamo gran fatto: e perchè se i sommi ingegni non ce la danno, dovremo riceverla proprio da te che sei una quantità infinitesima in confronto di essi? — Accettatela, io soggiungo, fate a mio modo. Come valenti Architetti approfittarono e si trovarono contenti dell' avvertimento del vile facchino che gridò *acqua alle funi*, così fate altrettanto anche voi: non badate alla meschinità di chi vi porge il consiglio, ma vi aderite e ve ne troverete soddisfatti. Vi sonó, non bisogna illudersi, vi sono certe storte opinioni, certe larve di dimostrazioni, certi stomachevoli pregiudizi che non fanno onore alla scienza, dissi male; dir dovea che fanno disonore sommo e vergogna a coloro che la deturpano e svisano, proseguendo a coltivarli e a tramandarli agli Allievi quasi sacro deposito ricevuto dai Maestri loro, mentre avrebbero ingegno per disfarsene ed eliminarli. Questi difetti, sono la prima cagione per la quale coperta di vizi non suoi, ma de' suoi espositori, la bella Scienza dell' esattezza apparve spregevole per fino all' Inventore dell' applicazione dell' Algebra alla Geometria, il gran Cartesio, e ad Obbes e a Gibbon e al Castelli e a Buffon e a Condillac e a Chateaubriand, e a molti altri distinti Scienziati. Ebbene la nuova distinzione da me introdotta, una volta che da voi fosse addottata vi trascinerebbe naturalmente ed inevitabilmente, vostro malgrado

puranche, ad una prudente ed utile ritirata da molti e molti di quegli errori di massima e di metodo che la venustà denigrano delle Matematiche discipline, e per mano guidandovi, estesa una via vi aprirebbe a novelle vedute di non leggero interesse.

47. Ma queste sono quelle appunto che non vogliamo, parmi sentir gridare gli amici dell' immobilità nociva al vero progresso delle Scienze al pari delle intemperanti innovazioni. Se noi ammettiamo questa distinzione, la nostra causa è perduta. Una volta che non ci venga più permesso di mescolare e confondere là con gli astratti in un medesimo gruppo i numeri indicanti ripetizione, una volta che ci sorta di bocca la concessione che se ne faccia una classe a parte, una volta che in grazia di questa noi permettiamo venga fatto il rimarco che que' numeri non possono essere giammai frazionari, come il possono essere gli astratti, un folto nembo d' incommodissime conseguenze ci si para d' innanzi. Noi non potremo più allora ammettere moltiplicazioni nelle quali effettivamente il moltiplicatore sia un rotto; non divisioni che abbiano frazionario il quoto quando si cerca il numero delle parti del tutto a dividersi; non divisioni che abbiano frazionario il divisore quando se ne cerca la grandezza; non potremo parimenti ammettere frazionario nè l'esponente nelle quantità potenziali, nè il numero n dei termini nelle progressioni, poichè tutti questi esprimendo ripetizione, debbono essere essenzialmente interi; e dopo che tutto ciò fosse ammesso, nostro malgrado saremmo naturalmente indotti a dover investigare quali precise idee si debbano realmente annettere alle indicazioni del calcolo in tutti què' casi nei quali e il moltiplicatore e l' esponente e il numero dei termini d' una progressione mentiscono l' aspetto di frazionari, subito che l' ammessa distinzione ci avrebbe fatto il bel servigio di obbligarci a convenire che quelle espressioni prese alla lettera, sono assurde. Vedi or tu, rimproverandomi mi direb-

bero, in qual nuovo orizzonte ci troveremmo e di quante cose converrebbe cercare di rendere ragione, alle quali nemmeno per sogno abbiamo pensato giammai.

In questo campo novello, proseguono a dirmi, se fossi un poco più esperto, vedresti essere prudentissimo divisamento il non porre il piede, poichè tale troveresti tu un gineprajo da non uscirne sì facilmente; e gli Scrittori i più classici ce ne hanno dato l' esempio. Niuno di essi in fatti tu trovi che ti parli *ex professo* delle ora esposte difficoltà, del modo di toglierle, della debita interpretazione che dar conviene alle parole allorchè prese nel senso proprio esprimono una contradizione, un assurdo. E se i Classici non l'hanno fatto, e sapevano bene Essi come si debba guidare l'insegnamento, segno è dunque che le citate cose non sono tasti a toccarsi nella elementare istruzione e quindi ben chiara è la conseguenza che la più volte citata distinzione debba e rifiutarsi e abborrirsi. E forziamoci a via respingerla a mille passi in distanza, sicchè nemmeno abbiano a subodorarla gli Allievi: altrimenti noi non potremo più esimerci da una tempestosa pioggia di dubbi, di difficoltà, di esigenze. Se ad essi dassimo per esempio ad eseguire la moltiplicazione d' una quantità per $^3/_5$, la divisione per $^7/_8$ ec. assicurati che non ci farebbe niente meraviglia che l' ordinamento e l' indiscretezza di quei saputelli giungesse sino al punto di chiederci che si spieghi cosa significhi moltiplicare per $^3/_5$ e dividere per $^7/_8$, non ci farebbe meraviglia in somma che si avesse la pretensione impudente di essere informati nel mentre stesso che operano, che cosa sieno le operazioni appunto che vanno eseguendo. D' intoppi di simil genere non ne piace vedere seminata la strada dell' istruzione ove non già camminare a rilento, ma é nostra intenzione a passi giganteschi e senza inciampi correre velocemente. E questi intoppi non s' incontrano al certo, allorchè destramente avvezziamo i giovanetti a rimanere soddisfattissimi del comodo precetto,

che il seguente verso con moltissima chiarezza ti esprime.

Tu fa così , nè mai curarti d'altro .

Nè i citati mali sono i soli che dall' ammettere l' esposta distinzione ci pioverebbero addosso. Essa è proprio l' odiatissimo vaso di Pandora, che non cessa mai dal versarne su questa misera terra. Ed in vero una volta che per sciogliere le difficoltà nate da quella distinzione, ci fossimo lasciati imporre il giogo pedantesco di dettagliare la ragione di ciò che insegniamo, ci troveremmo senza accorgercene posti nella vilissima servitù di non potere salire più in cattedra senza aver prima sacrificata una qualche mezza ora in uno studio di preparazione al disimpegno della lezione; e dovendo poi render ragione dei minuti dettagli, gli Allievi perderebbero quell' utile sommo che nella istruzione debbe aversi sempre di mira, l' alto, l' unico oggetto dei comuni desideri (sarà l' apprendimento del vero io m' andava immaginando, oibò) LA BREVITA'. Con tutte queste dilucidazioni bisognerebbe tenere i Giovani ad intisichire un' anno almeno nell' Aritmetica, e sì e nò che un' altro solo bastasse per l' Algebra e la Geometria, ed in allora con tutte queste lungaggini, come luogo aver più potrebbero le frequenti dilettevoli istanze dirette ad ottenere l' adito agli studi universitari prima dell' età di anni 18 dalle leggi in vari stati prescritta; dove più allora la dolce soddisfazione di partecipare della ceremonia *libri , anuli et byreti* e sentirsi salutar Dottori prima che sia fregiato il volto dell' onore del mento? Tutti questi inconvenienti ed altri che per brevità tralasciamo, e sono gravissimi, tutti derivano da quella improvvidissima distinzione che tu vorresti farci adottare. Che tanti fossero i danni che ne discendono, lo avresti tu mai immaginato? — Ah basta! tralasciate pure per amore di brevità e non m' impaurite più oltre collo schiudermi l' abisso delle gravi enormità, di che io sarei responsabile.

Ma non prolunghiamo lo scherzo che pur dovrebbe a buono intenditore qualche cosa già avere espresso e svelato. Io vi paleso, o caro amico, di averne usato con la decisa intenzione di fare al vivo *sentire* l' importanza della mia distinzione, e voglia il Cielo che qualche buono effetto abbia a produrre. Quest' arma poi del ridicolo a mio bell'agio tornerò di nuovo a maneggiare alla meglio, e così un poco di bernesco servirà a rompere la monotonia del severo ragionamento. Quando è morale, e lo è sempre se dei vizi soltanto prenda a far marcare le sconcezze e i danni, lo scherzo è un rimedio utilissimo. Esso è lo stimolo il più potente a pungere l' amor proprio dell' uomo; sicchè senta rossore di proseguire a sostenere dei vergognosi pregiudizi. La sua forza è maggiore della stessa invettiva

. . . . *Ridiculum acri*
Fortius et melius magnas plerumque secat res.

ce lo avverte anche Orazio; e *magnae res*, grandi ostacoli sono certamente gl' inveterati pregiudizi delle scuole, la eliminazione dei quali è uno dei più caldi miei voti, e lo scopo principale cui mirano queste mie lettere.

LETTERA III.ª

SULLE ADEQUATE NOZIONI DELLA MOLTIPLICAZIONE .

ARGOMENTO

Alla comune definizione della moltiplica io ho aggiunto alcuni schiarimenti . Incontreranno opposizioni perchè nuovi e non autorevoli ? Il conio dell' antichità e dell' autorità non è sempre l' impronta del vero (§. 48. al 51.) — Moltiplicare è ripetere : dunque moltiplicare per frazione è un assurdo (§. 52) — Ma questa espressione si usa : dunque è d' uopo conoscere come certe analogie nei problemi a risolversi ne abbiano introdotto l' uso, destinandola ad esprimere il *prender frazione d' una quantità*, lo che si ottiene per mezzo d' una moltiplica preceduta da divisione (§. 53 e 54) — La moltiplica per frazione non è dunque I. nè una unica operazione , II. nè diversa dalla moltiplica per interi, III. nè molto meno opposta (§. 55.) — Falso è quindi che moltiplicare per es. per 3 quinti sia un moltiplicare per una quantità cinque volte più piccola di 3 ; poichè ciò è impossibile se al moltiplicare si dà il senso di ripetere, nè altro fuor del ripetere gli è mai stato concesso (§. 56) — Ed in vero alla moltiplica distinti matematici e Newton , e Clavio e La Croix , e Cauchy hanno dato diverse definizioni, e tutte difettosissime, diverso significato però, se ben si rifletta , non le hanno accordato giammai (§. 57 al 61) .

48. **D**al titolo di questa e delle altre due lettere consecutive aggirantisi sulla moltiplicazione e divisione , molti , i quali non si sono dati gran carico di ritornare di nuovo con la riflessione sulle acquistate elementari nozioni della scienza delle quantità , saranno eccitati alle risa — Aspettiamoci da un giorno all' altro qualche innovazione ancora sull' *Abbici,* mi pare sentir bisbigliare taluni, l' un

dell' altro all'orecchio, giacchè siamo giunti ad averle persino sulle cose le più ovvie e triviali, sulle nozioni delle prime operazioncelle dei numeri, la moltiplicazione e la divisione!!! E lasci in pace questo importunissimo innovatore i poveri Giovanetti, che di esso più giudiziosi non si sentirebbero molto disposti, e ben ne hanno il donde, di rinunciare alle semplici e chiare definizioni che dai vecchi padri della Scienza abbiamo ereditato. Non hanno queste dato nel naso ai Classici d' ogni secolo, possibile che abbiano ad infastidire e irritare le olfattorie papille d' un uomo che appo costoro è un ridicolo insetto? — Eppure tant' è. Malgrado queste obbiezioni e contrarietà che io mi vo immaginando, non mi perdo affatto di animo; ed anche sul concetto della moltiplica e della divisione non una sola, ma anzi tre lettere, e nemmeno delle più brevi. E voi mio caro Amico che con qualche trasporto le mie lezioni avete studiato in cui varie sono sparse delle idee che andrò ora esponendo, io son certo non avrete a discaro che ve le torni al pensiero.

49. Finchè io nella prima e seconda edizione dei miei elementi di Matematica mi sono limitato a dire, come il ripetere *due*, *tre*, *quattro volte* una quantità si è chiamato *duplicarla*, *triplicarla*, *quadruplicarla*, così *moltiplicarla* si è detto il *ripeterla molte volte*; e che perciò la *moltiplicazione è quell' operazione per la quale un numero si ripete tante volte quante ne indica un altro*, niun rimarco in contrario. Ma quando, proseguendo io per quanto le mie forze me lo hanno permesso, a studiare i migliori modi e i più acconci a communicare chiare e giuste le idee della scienza, mi sono fatto lecito nella terza edizione di apporre qualche leggero mutamento alla definizione della moltiplica, quando ho fatto rimarcare agli Allievi che il prodotto che ne risulta è un *tutto* formato di parti eguali, che il moltiplicando è la parte che si ripete, ossia è la

grandezza di ciascuna di quelle parti eguali che il tutto compongono, e che il moltiplicatore ne indica il *numero*, o ciò che è lo stesso indica il *quante volte* per formare il tutto va ripetuta la grandezza delle parti ossia una qualunque di esse, avrò incontrato la comune approvazione? Questi lievissimi schiarimenti che non alterano in conto alcuno il giusto primitivo concetto della moltiplica, che si bene a mio parere la mente preparano degli Allievi a riconoscere le intrinseche importantissime sue relazioni con la divisione, relazioni le quali in tutti quanti gli aspetti loro non mi vergogno asserire, che pochi anni sono nemmeno io conosceva, questi schiarimenti che si acconciamente dispongono la riflessione a distinguere se un problema richiegga l' una piuttosto che l' altra operazione, credete voi che sieno gradevoli a tutti?

Gli assoluti intolleranti delle più piccole mutazioni non sono enti puramente fittizi della mia fantasia. Fate che ad essi io dica « *La moltiplicazione è quella operazione per di cui mezzo data la grandezza delle parti tra di loro eguali che debbono costituire il tutto; e datone il numero, si trova il tutto da esse costituito, ripetendo la grandezza delle parti tante volte quante ne indica il numero loro* » Quale impressione eglino ne riceverebbero? Ben disgustosa sicuramente. Ad ogni parola della ora esposta definizione che eglino udissero diversificare dall'antica, quasi fosse il fiato che la emette una saturnina esalazione, io scommetto che voi vedreste costoro raggrinzar le labbra, torcere il naso, divincolarsi nella persona, e poverini non trovar refrigerio ai colici dolori da quelle nauseanti parole originati, se non nel plauso di chi ligio ai pensamenti loro si facesse con essi tosto a gridare: Si avete ragione: per l' operazione che dicesi moltiplica « un numero viene tante volte ripetuto quante ne indica un altro ». Questa è la definizione breve e chiara e all' uopo bastevole

che *ab immemorabili* ci dettero i fondatori della Scienza ; e questa inalterata si segua e si mandino alla malora quei soverchi inconcludenti , goffi e puerili cincigli e merlature di che vorrebbe contornarle un affaccendato e ridicolo riformatore .

E se in questo fantasticare della mia mente vi fosse eccedenza: se anche accadesse che le ideate opposizioni non fossero che sogni, se a questi sogni (i quali pure spesso *son le immagin del dì guaste e corrotte*) se a questi sogni , ripeto null' affatto di reale corrispondesse , voi le tendenze scrutinando dell' uman cuore ben vi avvedrete che privi di verisimiglianza non sono, e noi dai reali non solo, ma dagli enti possibili ancora procurare dobbiamo di trarre profitto . La inclinazione al dispregio delle cose che per la prima volta ascoltiamo in materie che d' altronde siamo di avviso di ben conoscere , non ha nulla di stravagante e d' improbabile. Oh quante volte questa inclinazione, se vogliamo essere ingenui, è d' uopo che confessiamo, mio caro amico, esser venuta a far capolino all' uscio del nostro cuore pur anche » *Ci si dicono cose nuove in materie che noi possediamo : dunque esse meritano il nostro disprezzo* » Entimema egli è questo , che ben spesso siamo anche noi tentati a ripetere . E sapete chi ce lo pone d' innanzi? Un sempre superbo e temerario inquilino , che quanto più ci affatichiamo a cacciare di casa nostra , e tanto più furtivamente per secreti nascondigli di nuovo s' introduce, e nostro malgrado cerca di dominarci. È desso che di soppiatto dopo avere d' insidiosi veli coperta la maggiore delle premesse che è sottintesa nella esposta argomentazione , così velata (altrimenti troppo la sua sconcezza ne apparirebbe) la fa vedere e non vedere a nostra mente per carpirne l'approvazione. Ma egli è pur bene che voi ed io nuda nuda nella sua integrità la esaminiamo, convertendo così l'entimema suddetto nel seguente sillogismo. » *Tutto ciò che*

per noi è nuovo e diverso da quello che in materie scientifiche conosciamo o è un errore, o almeno una inutilità meritevole del nostro disprezzo: ma le cose che in materie scientifiche ci vengono ora esposte, per noi sono nuove: esse dunque deggiono disprezzarsi.» E se nel mentre riflessione noi poniamo in questo argomento, fortunatamente ne avvenga che a quel Giovinastro orgoglioso e importuno, che ben già lo avrete riconosciuto per Messer Amor Proprio, subentri a farci visita istruttiva e gentile Madonna Prudenza, non sì tosto si è al nostro fianco essa assisa che la maggiore delle ora esposte premesse la quale impudente e superba ci dominava, avvizzita fra le gelide mani di lei, si annichila e scompare, ed altra in sua vece ne sorge tutta propria del carattere di quella grave Signora, sicchè in meno che nol dico, immantinente l' esposto sillogismo tramutasi in questo « *Le cose nuove non meritano di essere nè approvate nè disprezzate, se non con cognizione di causa, se non cioè dietro profondo e maturo esame dei motivi per i quali si sono introdotte, degli effetti che possono produrre, del metodo che le ha sviluppate: ma le cose che oggi ascoltiamo e leggiamo sono per noi cose nuove: dunque non dobbiamo nè approvarle nè disprezzarle, se non dopo che sieno divenute soggetto di profonda e matura disamina* » e questo argomento mentre e voi ed io procureremo che dalla nostra memoria non si dilegui, per altri pur anche non sarà forse inopportuna avvertenza ..

50. Ma tu, figliuol mio, non hai colto nel segno, parmi che taluno con vera paterna carità mi soggiunga. Non è la novità che ci spinge al dileggio delle tue cose, come falsamente hai tu immaginato: è ben tutt' altra la causa: e noi siamo cauti e prudenti abbastanza per non volere e netta e tonda e sperticata dirtela in viso. Ci limiteremo solo alle seguenti richieste. Ti sei tu ben misurato con i classici

scrittori : hai veramente ben ponderato *quid valeant humeri, quid ferre recusent* : in una parola hai tu veduto senza far uso del microscopio qual sia la figura che tu fai nel mondo scientifico? Noi, a dirtela, dubitiamo di no —. Ed io da questi cenni o carissimo amico, traggo motivo di indurvi a rimarcare, come a danno dell' acquisto del vero altra sorgente pur v' abbia d' errori. Havvi per cotestoro, io veggo bene un nuovo criterio di verità che sopra tutti gli altri primeggia: questa è la fede di origine delle proposizioni ad esaminarsi, il sindacato sulla nobiltà dei loro natali, sul merito cioè dei loro autori; cosicchè poco manca che lo studio del Blasone pur anche non abbia nell' arte critica ad inserirsi. Di questo erroneo modo di vedere ancora i tristi effetti non mancano ; ed eccovene nello stesso nostro caso un esempio. Se a cotestoro che si lasciano prender pel naso dalla forza dell' autorità unicamente, con tutta sommissione io mi facessi innanzi e dicessi : di grazia Signori, io avrei fatto all' antica definizione della moltiplica una lieve addizioncella : potrei nudrire qualche speranza che da voi fosse accolta benignamente? Io mi sentirei tosto ripetere — Tu un addizione alle antiche definizioni della scienza! E ardisci chiedere la nostra approvazione? Giammai — Ma questa addizioncella è tale che al primitivo stabilito concetto della moltiplica non arreca il menomo cambiamento, anzi non fa che aggiungervi qualche dilucidazione — Non serve — Essa, io spero di dimostrarlo, ha pur anche il pregevole requisito dell'utilità — E che importa? Mente povera non ha diritto alcuno alle più piccole innovazioni; e perciò la tua aggiunta merita derisione e disprezzo — E se io nè contento nè rassegnato loro soggiungessi : ma badate, Signori, che alla stessa definizione altri pure prima di me hanno fatto dei cambiamenti notabili: ma avvertite non aver io difficoltà alcuna di aggiungervi ancora che questi, se bene si ponderino, rendono o-

scuro, anzi nascondono il vero naturale concetto della moltiplica: e che qualora si voglia ad essi accordare il titolo di definizione, convien dire che costituiscono una definizione tutta nuova, inesatta per sè medesima, e cagione di ulteriori gravissime inesattezze. Dirovvi di più Signori miei, che gli Autori, i quali hanno nella scienza introdotta questa definizione, intesi sempre a sublimi scoperte l' hanno posta in campo senza molto riflettervi sopra: non posso però occultarvi che essi sono sommi e classici ingegni — Basta questo, non più: essi hanno il pienissimo diritto dell' innovare. Ad essi *quidlibet audendi semper fuit aequa potestas*: la nuova definizione pertanto da noi si tolleri: che diciamo! si propaghi anzi, e a spada tratta si sostenga e difenda, malgrado il danno che possa l' insegnamento riceverne — Ecco che cosa io mi sentirei replicare.

Ma queste repliche, potrebbero dirmi, sei tu che per qualche scopo particolare te le architetti, sono ombre che per dare risalto alle tue tinte, tu a tuo capriccio disegni. Se nuove definizioni della moltiplica, sebbene fossero da un genio puranche proposte, si rinvenissero difettose, da noi non sarebbero accolte, ed il supporlo è una tua ingiuriosa chimera — Ed io: che voi abbiate non solo disposizione ad accoglierle, ma che già accolte le abbiate: che la mia supposizione cioè non solo non sia chimerica e del tutto spiritosa invenzione, che neppure sia un romanzo storico, ma nuda e vera storia di fatti, spoglia di quell' ibrido innesto della favola al vero, pel quale poco io parteggio, avremo in breve opportunità di vederlo.

51. Ciò che frattanto dalle esposte cose dedurre m' interessa, perchè dir non mi si possa che io lascio sfuggir occasione a quei saggi riflessi, che influir possono sull' acquisto delle giuste ed esatte cognizioni, scopo primario della nostra corrispondenza, è il seguente avvertimento. La circostanza ci ha portato a conoscere come nostro malgrado

sotto le simulate sembianze di giusto disprezzo per la neomania e di giusto rispetto per l' autorità , il nostro amor proprio direttamente agendo sui nostri affetti tenta di trascinare l' intelletto pur anche al non ammettere verità perchè nuove , al non ammetterle perchè derivanti da oscura sorgente , pregiudizi che sono entrambi fonte feconda di gravissimi errori . Guardiamoci dalle sue insidie ; e per non cadere nei suoi lacci , limpide e chiare spesso ci sieno in mente queste due saggie massime » I. *In fatto di scienza il conio dell' antichità, e dell' autorità non essere sicura impronta del vero , siccome non lo sono del falso le novità e la pochezza d' ingegno di chi le produce* : II. *il maturo e profondo esame degli intrinseci argomenti che le materie scientifiche ci presentano essere l' unica guida al discuoprimento della verità* . »

E per tornare dal non inutile episodio al nostro proposito , io spero che i miei ragionamenti sulla moltiplica e divisione che ad esporre ora mi accingo , e quelle poche novità che vi sono per esse introdotte , come da voi utili furono riconosciute e vi piacquero allorchè le studiaste , così tali abbiano pure ad apparire a tutti coloro che le due massime esposte tengono vive alla loro memoria .

E se io loro spacci frottole o no; se tenti o no dar loro a credere lucciole per lanterne , non frappongo più indugio : mi seguano e lo vedranno .

52. Moltiplicare è ripetere . Ecco il naturale e vero significato della parola . E questo, per poco che riflettiamo sopra i diversi casi di moltiplicazione che possono darsi , ci reca di per sè stesso ad un importante rimarco , che può solo sfuggire a que' pacifici gaudenti i quali contentissimi di operare senza darsi la menoma cura di saper ciò che fanno, non badano che ai risultati delle operazioni da essi meccanicamente eseguite . In tal caso , non v' ha dubbio , non possono essi accorgersi di differenza alcuna fra la mol-

tiplica per es. d' una frazione per un intero, e quella d' un intero per frazione. Essi non riflettono che l' ottenere un identico risultato non è sempre l' effetto d' una medesima operazione; ed io cento volte, facendo scuola, ho inteso dirmi da Giovanetti nelle prime prime elementari nozioni sotto altro metodo istruiti « *l' uno e l' altro caso sono la stessa cosa*. » Eppure un solo istante di ponderazione sul senso della parola moltiplicare, ci fa conoscere esservi a rigore fra l' una e l' altra espressione, *moltiplicare per intero e moltiplicare per frazione* tanta discrepanza, quanta ne corre fra l' indicazione di un' operazione e l' indicazione del nulla. Ed in vero quando ci proponiamo di *moltiplicare per un intero*, ci proponiamo di ripetere una quantità un dato numero di volte, ci proponiamo perciò di *operare*: quando progettiamo di *moltiplicare per frazione*, noi progettiamo un impossibile, poichè il moltiplicatore essendo un numero indicante ripetizione e perciò essenzialmente intero (§. 37) non può essere frazionario. La progettata operazione è quindi un assurdo, e poichè l' assurdo non è che un nulla vestito di parole: *un nulla* è dunque la progettata operazione.

53. Quindi è che mentre noi ci formiamo una idea chiarissima di ciò che sia moltiplicare per es. $^3/_{20}$ per 5, ossia ripetere $^3/_{20}$ cinque volte, niuna idea possiamo formarci di ciò che sia moltiplicare 5 per $^3/_{20}$; poichè stando al significato accordato fin quì alla parola moltiplicare, moltiplicar 5 per $^3/_{20}$ equivarrebbe a dire *ripetere il 5 tre ventesimi di volta*, espressione assurda, cui niuna idea corrisponde. Egli è dunque indispensabile lo spiegare quali idee a quelle parole insignificanti annettiamo per convenzione. Ed in vero se prima di dare regole sulla moltiplicazione degli interi, si stimò necessario di far conoscere cosa significhi moltiplicare p. es. per 3, necessario dovrà stimarsi egualmente prima di dare regole intorno alla moltiplicazione sulle

frazioni il dichiarare cosa significhi moltiplicare per es. per $^3/_5$: altrimenti operazioni faremo eseguire coll' invidiabile prerogativa di non saper nulla di ciò che vanno operando. Il chieder dunque che si appalesi e si dichiari come l' uso siasi introdotto di espressioni che prese a rigore di termine sono assurde, e quali idee si è convenuto associarvi, sarà, o istruttori di Matematiche a voi lo chieggo, sarà una esorbitante ed indiscreta esigenza? Per intenderlo, cominciamo dal rimarcare che noi dalla analogìa siamo indotti a dare ad operazioni, sebbene un poco diverse, lo stesso nome, allorquando sono dirette alla soluzione di problemi della stessa indole. Ed operazioni diverse possono benissimo essere richieste da problemi della medesimà indole, quando le unità prese di mira in taluno di essi sono assolute, in talun' altro di essi sono frazionarie. E per venire al particolar caso che ci riguarda, prendiamo di mira tra le circostanze pratiche, nelle quali si ricorre alla moltiplicazione, qualcheduna di quelle, in cui la quantità (da cui si deduce il moltiplicatore quando essa è un intero) possa esser anche un numero frazionario. Per es. noto il prezzo della unità di una data cosa qualunque, come di una libbra di zucchero, che supponiamo essere soldi 12, si cerchi il prezzo di una quantità di esso. Egli è evidente che se la quantità, di cui si cerca il prezzo, è un numero intero (come nel caso che si cercasse il prezzo di 5 libbre) l' intento si otterrebbe per mezzo di una moltiplicazione, ripetendo cioè 5 volte i soldi 12 valore di una libbra: ma se la quantità di cui si cerca il prezzo, fosse un numero frazionario, fosse per es. $^5/_6$ di libbra, noi tosto ci avvediamo che la semplice moltiplicazione non vale a procurarci l' intento.

Siccome però chiamiamo moltiplicazione quella operazione per di cui mezzo si conseguisce lo scopo, quando la quantità di cui si cerca il valore è un numero intero, p. es.

5, così per analogia chiamiamo moltiplicazione l' insieme ancora di quelle operazioni con le quali ci procuriamo la soluzione dello stesso problema quando la quantità di cui si cerca il valore è un numero frazionario, come è $^5/_6$ di libbra. E siccome quando a quantità di cui cercasi il valore è un numero intero, dessa è il moltiplicatore, così per analogia chiamasi moltiplicatore anche il numero frazionario $^5/_6$ di libbra (quantità di cui parimenti cerchiamo il valore) quantunque il $^5/_6$ a rigore non possa essere moltiplicatore; e al modo stesso che per prendere il valore di 5 libbre, ossia per prendere 5 volte il prezzo di una libbra, si dice che moltiplichiamo per 5, così per prendere i $^5/_6$ del prezzo di una libbra, ossia per prendere 5 volte la sesta parte del prezzo di una libbra, si dice che moltiplichiamo per $^5/_6$. Quindi è che per le esposte analogie *il prendere i* $^5/_6$, e per dirlo in genere, *il prendere una data frazione di una quantità, qualunque ella sia, tanto intera che frazionaria, si dice* MOLTIPLICARE *quella data quantità per la data frazione*, e quando viceversa diciamo di moltiplicare una data quantità per una frazione, altre idee non possiamo annettere a queste parole che quelle di prendere la indicata frazione della data quantità.

54. E se moltiplicare una quantità per una frazione significa prendere della quantità quella parte che viene dalla frazione indicata, sarà anche quì una esorbitante esigenza il richiedere quali operazioni fare convenga per ottenere l' intento? La logica naturale ci suggerisce che per prendere i $^5/_6$ ossia per prendere 5 volte la sesta parte di 12, conviene prima d' ogni altra cosa trovarne il sesto, e poi ripeterlo cinque volte. Ora il sesto di 12 si ottiene col dividere il 12 per 6 denominatore della data frazione $^5/_6$, e si ripete poi 5 volte il sesto ottenuto, che è 2, col moltiplicarlo per 5, che è il numeratore della frazione medesima, e così nel 10, che ne risulta, abbiamo espressi i $^5/_6$ di 12 che

si ricercavano . E poichè prendere i $^5/_6$ di 12 si è impropriamente chiamato *moltiplicare* 12 *per* $^5/_6$, ne segue che impropriamente il risultato delle ora fatte operazioni , cioè il 10 , si chiami col nome che suol darsi al risultato della moltiplicazione, si chiami cioè il prodotto della moltiplicazione di 12 per $^5/_6$.

E per passare dalle idee particolari alle generiche , diciamo che ad oggetto di prendere una frazione di una quantità , ossia ad oggetto di moltiplicare, come suol dirsi , una quantità per una data frazione , conviene dividere la data quantità pel denominatore , e così ottenere di essa quella parte che è dal denominatore indicata , e moltiplicare poi l'ottenuto quoto pel numeratore , ossia ripetere tante volte quella parte ottenuta per quante volte il numeratore lo indica , affine di prendere della data quantità quanto appunto dalla frazione viene espresso .

La moltiplicazione per frazione non è dunque un unica operazione , ma un complesso di una moltiplicazione e di una divisione ; e viene riguardata per una sola , chiamata col nome non della 2ª ma della 1ª, perchè serve a sciogliere problemi , che si scioglierebbero con la semplice moltiplicazione, se quella quantità che c' indica quante volte debba ripetersi un dato numero , fosse un intero e non una frazione , siccome è nel nostro caso .

55. Secondo queste maniere di vedere, la moltiplicazione per frazione non sarebbe che un insieme di due operazioni già note: ma non potrebbe riguardarsi la moltiplicazione per frazione , I. come una sola operazione *sui generis* : II. come una operazione tutta diversa dalla moltiplicazione degli interi , anzi III. come d' indole affatto opposta ; poichè mentre la moltiplicazione per interi produce aumento , la moltiplicazione per vere frazioni produce diminuzione , siccome osserviamo nella moltiplicazione di 12 per cinque sesti , nella quale il prodotto 10 che abbiamo ottenuto è minore del moltiplicando 12 ?

I. No : la moltiplicazione per frazione non può riguardarsi per una operazione unica e *sui generis* . Sarebbe un' operazione *sui generis* , se realmente fosse vero che nella così detta moltiplicazione di 12 per $^5/_6$, il 12 fosse il reale moltiplicando , ed il $^5/_6$ il reale moltiplicatore , siccome appunto sogliono chiamarsi ; ma ciò abbiamo osservato essere manifestamente falso . Ed in vero quando noi vogliamo prendere cinque sesti di 12 , ossia 5 volte il sesto di 12 , il 12 non è il vero moltiplicando ; poichè e in questo , e in ogni altro simile caso , il vero moltiplicando non è quello che viene annunziato per tale : il vero moltiplicando anzi non è fra i dati del problema . Esso è un incognita , che ritroviamo però tosto , dividendo la quantità data pel denominatore della frazione , cioè nel nostro caso dividendo 12 per 6 ; ed il vero moltiplicatore non è la stessa frazione , che viene per moltiplicatore annunciata , cioè cinque sesti , ma il di lei solo numeratore , cioè 5. Se dunque il risultato della così detta moltiplicazione per frazione si ottiene , dietro tenendo ai soli suggerimenti del senso comune coll' eseguire due note operazioni sugli interi, la moltiplicazione cioè e la divisione, la così detta moltiplicazione per frazioni non è un' operazione unica *sui generis* . Riguardandola per tale , e prendendo per moltiplicando il 12 , e per moltiplicatore il cinque sesti , invece di prendere pel moltiplicando il dodici sesti , e per moltiplicatore il 5 , si attribuisce al moltiplicatore la proprietà di essere frazione , proprietà di cui non è suscettibile , togliendola al moltiplicando cui nel caso nostro appartiene .

II. E' pure inesatto il dire , che la moltiplicazione per frazioni è una operazione diversa dalla moltiplicazione per interi , giacchè convien dire non già che sia una cosa diversa , ma anzi che è la stessa moltiplicazione per interi , solchè preceduta da una divisione . Ed in vero il prendere una frazione d' una data quantità , dà luogo ad una molti-

plicazione (l' indole della quale operazione è sempre quella di *ripetere* una stessa quantità) ma non consiste in una semplice moltiplicazione, mentre convien prima trovare il moltiplicando per mezzo d' una divisione . E il tacere una operazione che è sottintesa non è certamente un alterare la natura di quella che è espressa .

III. Falso è poi che l' indole della moltiplicazione eseguita nelle frazioni sia opposta all' indole di questa operazione negli interi , falso essendo che la moltiplicazione nelle frazioni diminuisca la quantità ; poichè se è vero che il risultato della così detta moltiplicazione di 12 per cinque sesti è 10 , che è minore di 12 ; è anche altresì vero che 10 non è un semplice prodotto di moltiplicazione , poichè non è 12 che si moltiplichi per cinque sesti , ma è dodici sesti , ossia 2 che si moltiplica per 5 , e il prodotto 10 non è certamente più piccolo del vero moltiplicando 2.

56. Ma (potrebbesi insistere ancora) quale piccolezza non è mai quella di tanto affacendarsi per provare che la moltiplicazione per frazioni abbraccia due operazioni ! E quale scandalo ne viene , se si prosegua a dire con la comune degli Aritmetici che la moltiplicazione d' una quantità per frazione p. es. per due terzi è una operazione unica , è cioè la moltiplicazione d' una quantità per una quantità tre volte più piccola di 2 ; e che perciò dopo di aver moltiplicato la data quantità per 2 , convien dividere il prodotto ottenuto per 3 , perchè non per 2 , ma per una grandezza 3 volte più piccola di 2 doveva moltiplicarsi la data quantità ?

Quindi allorchè tu ti scagli contro la comune degli Aritmetici , dicendo che essi non insegnano cosa significhi moltiplicare per $^2/_3$ etc. vomiti contro di essi una solenne calunnia tutta diretta a far altri convenire nella credenza che tu esclusivamente possegga la privativa del ben insegnare , tanto è il delirio in che la febbre della presunzio-

ne ti ha immerso. Ma e non ti avvedi avere gli Aritmetici spiegato per lo appunto quanto basta per la dimostrazione, allorchè hanno detto, siccome si è sopra notato, che *moltiplicar per $^2/_3$ è un moltiplicar per una quantità tre volte più piccola di due?* Non è così esposto con somma concisione e chiarezza quanto è d' uopo sapere, senza curarsi di sottilizzare in tante sofisticherie, e cercare il pelo nell' uovo? Ah! cessa dal tuo affaccendarti a criticare i metodi altrui e meglio rettifica i tuoi: chè sempre non troverai i gonzi ammiratori delle imponenti e gravi tue faufaluche.

Ed io a cotestoro: di grazia calmatevi: che il troppo riscaldarvi non vi pregiudichi. L' evidenza d' una nozione che tra molte altre false traluce, non vi seduca: se dessa è oro puro e ben coniato, ed è moneta spendibile, non per questo monete spendibili divengono pure i leggeri, sebben lucidi gettoni che l' accompagnano. Siate ben guardinghi a tutto pesare, a tutto vagliare esattamente e con circospezione per separare il falso dal vero. Sì: avete mille ragioni quando ci dite che *due terzi è una quantità tre volte più piccola di due*: ella è questa una palpabile verità: ma quando ci soggiungete poi che *moltiplicar per due terzi è un moltiplicare per una quantità tre volte più piccola di due*, avete tutti i torti del mondo, poichè questo è un palpabile assurdo. Ed in vero niun Aritmetico ha dato alla parola moltiplicare un significato diverso da quello di ripetere, e dire che dee *ripetersi due terzi di volta una quantità*, è dire un impossibile. Volete però voi da me il secreto per convertire immediatamente questa espressione insignificante in una utilissima verità? Eccovelo: semplicissimo è il mezzo che vi suggerisco. Posponete una semplice paroletta, e l'intento è ottenuto. Non dite più che *il moltiplicare per $^2/_3$ è un ripetere due terzi di volta una cosa*: dite in vece che *è un ripetere due volte il terzo di*

una cosa : e la metamorfosi dell' assurdo nel vero , è già ottenuta . Nella nuova espressione , sebbene di poco differisca dalla antecedente dimostrata assurda , voi trovate ad un tempo e la vera nozione dell'oggetto che vi si propone a dover conseguire e il processo che praticare dovete per ottenerlo , poichè viene essa a farvi conoscere che dovete moltiplicare per 2 il quoto della data quantità divisa per 3.

57. Ci potrebbero però taluni soggiungere, e come tu asserisci con tanta franchezza che niun Aritmetico ha dato alla parola moltiplicare un significato diverso da quello di ripetere , se anzi dei sommi ciò appunto hanno fatto per poter sostenere essere la moltiplica per frazione un unica operazione ? Non è questo un fare ingiuria ai genii della Matematica , non è un mostrare una crassa ignoranza della scienza e della sua storia? — Sì , voi dite benissimo : della scienza e della sua storia assai ben poco io posseggo : a tale però non giunge, per quanto sia madornale la mia insipienza , da disconoscere affatto ciò che hanno scritto in proposito Matematici sommi , e Newton e Clavio fra gli antichi, e fra i recenti Lacroix , Cauchy , Francoeur. Che anzi le definizioni della moltiplica che questi Classici hanno date , quelle appunto sono che come difettose in sul principio di questa mia lettera senza veruna difficoltà io vi venia dichiarando ; e poichè di gratuite asserzioni far gettito non è mia consuetudine, eccomi tosto a mostrarvi che esse sufficiente e adequata idea non ci danno della cosa definita ; e che quando alle espressioni insufficienti si aggiungano le necessarie dilucidazioni , queste niun altro senso in ultima analisi alla moltiplicazione conciliano che quello del *ripetere* , sicchè si verifica quanto ho di sopra enunciato non averle gli Aritmetici giammai accordato verun' altra significanza . Ed in vero se talvolta alla parola moltiplicazione annettono essi l' idea che una quantità va ripetuta , dopo però che gli si è fatto subire una divisione , questo non è che un

laconismo, in virtù del quale si tace una operazione che le particolari circostanze fanno ben sottintendere, ed il sottintendere un' operazione che si debbe eseguire prima della moltiplica, non è un alterare in conto alcuno il significato di questa.

58. Quei sommi Matematici però l'un dietro l'esempio dell' altro, senza prestar molta attenzione alla cosa, si fissero in capo che quel complesso di divisione e moltiplicazione cui si è impropriamente dato il semplice nome di *moltiplicazione per frazione*, potesse chiamarsi non solo, ma ritenersi puranche per una operazione individua. Per dare un qualche aspetto di verità a questo erroneo divisamento, riusciva espediente di architettare tale una definizione della parola moltiplicazione, che potesse ad un tempo adattarsi e alla semplice moltiplicazione di quantità per intero e all' insieme delle due operazioni di divisione e di moltiplicazione, nel complesso delle quali consiste la così impropriamente detta *moltiplica per frazione*. E ciò appunto da essi si fece: ma a che prò? La moltiplica per frazione proseguirà ad essere un complesso di due operazioni distintissime, finchè sarà necessario, come lo sarà sempre, eseguire ambedue per ottenere l' intento. Il nasconderle non è un distruggerle, e tutto l' artificio delle nuove definizioni è solo riposto in questo nascondimento.

59. Per tale oggetto Newton così definì la moltiplicazione. « *Multiplicatio illa est operatio in qua quaeritur nova quantitas in ea quacumque ratione ad quantitatem multiplicandam, quam habet multiplicator ad unitatem* » E Clavio poco da questa si discostò, allorchè rendendo, siccome egli disse, più universale la definizione datane da Euclide, sostenne che « *Multiplicatio numeri in numerum est inventio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eamdem proportionem habet quam alter multiplicantium ad unitatem* ». E di queste definizioni quale è

il giudizio che io ne formo? Eccovelo tosto come lo sento. Le cose indicate sono verissime, ma includono la nozione delle proporzioni, e quindi dei rapporti per quoto. Giusta idea di questi aver non possiamo quando i termini sono frazionarii senza le idee della moltiplicazione e divisione per frazioni: dunque queste proposizioni se sono verissime, se sono anche utili riguardate come esprimenti una proprietà del prodotto, sono poi difettosissime, se vengono riguardate come definizioni, perchè nozioni racchiudono che cognita suppongono la cosa a definirsi.

60. Dai meno moderni facciamo ora passo ai recenti. Molti di essi pure non troppo soddisfatti delle ora esaminate definizioni, credettero di toglierne gli inconvenienti con eliminarvi l' idea della proporzione per quoto, qualche altra espressione sostituendovi che convenire potesse tanto alla moltiplicazione per interi che alla così detta moltiplica per frazione. Con tali intenzioni Lacroix passò a dirci « *che la moltiplicazione è quella operazione per la quale si trova un numero detto prodotto che è composto col moltiplicando; come il moltiplicatore lo é con l'unità* ». Nemmeno questa però è definizione fornita dei debiti requisiti per essere adottata. Francoeur la taccia di poca chiarezza a motivo (uso le stesse sue espressioni) *che la parola* composto *si deve prendere in un significato attivo se il moltiplicatore é intero, e in significato passivo se è una frazione*. Siccome però nel tempo stesso che Francoeur non sempre chiarissimo, taccia Lacroix di poca chiarezza nella esposta definizione, fa poi uso in questa stessa sua critica di frasi che non sono chiare per nulla; così mi credo in debito di avvertire, che se egli giustamente condanna l' uso della stessa parola *composto* non sempre presa nel medesimo senso, nulla poi di preciso ci espone col dirci che *la parola composto riferita al prodotto va presa in significato passivo allorchè il moltiplicatore è una frazio-*

ne. Egli doveva dirci invece, se volea farsi intendere, che in questo caso per comporre il prodotto, il moltiplicando va diviso pel denominatore della frazione, e l' ottenuto quoto va moltiplicato pel numeratore, idee tutte necessarie all' oggetto che non sono risvegliate al certo dalle sole parole che il *prodotto debba essere composto passivamente*. E quand' anche usare si volesse a Francoeur la buona grazia d' accordargli che *l' essere composto in significato attivo*, trattandosi di prodotto, significhi che desso è formato in grazia d' un numero che si va per mezzo della successiva sua ripetizione ossia moltiplicazione per interi rendendo più grande, ne segue poi allora di legittima conseguenza che le parole *essere composto in significato passivo*, esprimer debbano l' opposto, che cioè il risultato che si ottiene va a formarsi in grazia di una data quantità che per la divisione diventa un dato numero di volte più piccolo. E dopo aver dato alle parole questo valore, ne segue pure che per esprimere una moltiplica per frazione, avrebbe dovuto esporre che in questo caso il prodotto è composto col moltiplicando prima preso in senso passivo (attesa la divisione che gli si fa subire pel denominatore della frazione) poscia preso in senso attivo, attesa la moltiplicazione che gli si fa subire pel numeratore. Ma l' esplicita dichiarazione di queste due operazioni è ciò appunto che non si vuole, perchè alla cosa definita toglierebbe le apparenze e il prestigio di una unica operazione, prestigio che d' altronde è favorito dalla inesatta ed oscura espressione dell' essere *il prodotto composto in significato passivo col moltiplicando*. Conchiudo io dunque che mentre giusta è la critica fatta da Francoeur alla definizione data da Lacroix, saria insufficiente d' altronde la correzione che egli proporrebbe per rettificarla. D' uopo era quindi che a secondare le erronee vedute, altra ne uscisse in luce: nè questo desiderio fù vano. Il celebre Cauchy la produsse,

Francoeur nulla ebbe in contrario da opporvi. Qualche istruttore cominciò subito ad adottarla nei suoi corsi; e poichè *quello che fa l' uno e gli altri fanno*, ben presto la novella definizione trovò in molti favore: ed eccola, voi già la vedete in parecchie recenti opere seguita e adottata.

61. *Moltiplicare* A *per* B dice Cauchy *significa operare sul numero* A *precisamente come si opera sull' unità per ottenere il numero* B ». Ecco la definizione del giorno tanto applaudita. — Ebbene, sarebbe mai che questa nemmeno, comechè presso tutti i moderni in onore, incontrasse o schizzinoso la tua soddisfazione? Tant' è, miei Signori (e questo chiamasi parlar chiaro e senza enigmi) non la incontra per nulla. Il nome e il merito di Cauchy è sopra ogni encomio: spregievolissime d' altronde sono le sue parole ora esposte se, per quello che si pretende, si riguardino come esprimenti una *definizione*: nè i difetti di questa cessano di essere in grazia della celebrità dell' autore. Non lasciandomi imporre dai nomi nè grandi nè piccoli, nè di viventi, nè di trapassati, ma dalla forza degli argomenti soltanto, io non ho potuto in conto alcuno approvarla. Sì chiari anzi alla mente mi si sono appalesati i suoi vizi, da farmi certo che lo stesso Cauchy che l' ha introdotta, e Francoeur che l' ha approvata, meco ne converrebbero pienamente. Io sono anzi d' avviso che lo stesso Cauchy nell' esporre la sopra enunciata proposizione non abbia avuta la decisa intenzione di accordarle il vero carattere di definizione e se pur lo avesse fatto, sia stato un *lapsus calami* l' averla per tale descritta. Io sono d' avviso che l' abbia soltanto esposta come un rimarco di analogia fra una operazione ed un' altra e nulla più; ed in tal caso la sua proposizione essendo una incontrastabile verità, non avrebbe in sè il menomo dei difetti, e tutto il rimprovero che come a definizione le abbiamo dato, si rovescerebbe sopra coloro che mancanti di quel delicato tatto sì

necessario alla scelta dei materiali adatti per la communicazione della parte elementare delle scienze, l' hanno per una vera definizione adottata. In ciò sono essi a sommamente condannarsi, poichè la sopradetta, o bisogna ammettere che non sia definizione, siccome io ritengo, o ammettendola, è d' uopo al certo di riguardarla oltre ogni credere difettosa.

Non lo è in vero una definizione; ed anche il più gretto studente di Logica si asterrebbe dal riguardarla per tale. Come è possibile in fatti, che quando vi si dice consistere l' operazione a definirsi nel fare su di A quella operazione stessa che facciamo sull' unità perchè divenga B, non abbiate a chiaramente intendere che questo non è un definire, ma un dichiarare soltanto che la definizione vi sarà nota quando conoscerete l' operazione necessaria a convertire l' unità in B? Possibile che non abbiate a conoscere che questo è un esimersi dal definire, fingendo di definire? Così, miei cari, si prendono alla rete i merlotti; e ben loschi e grossi, permettetemi che vi soggiunga, esser d' uopo che sieno, giacchè il filo della trama a dir vero non è sì sopraffino, nè sì tenace e stretta la maglia, da riuscir difficile l' accorgersene per non incapparvi e, dopo esservi incappati, l' uscirne.

Che se poi volessimo essere indulgenti a concedere che una definizione pur fosse, essa certamente viziosa al sommo sarebbe, e perchè difetta delle idee necessarie e perchè ridonda delle superflue. E I. *manca delle necessarie*, poichè dessa non ci dà nozione alcuna della operazione definita, finchè non ispieghiamo con qualche esempio quali operazioni subire deggia l' unità ad oggetto di divenire B, tanto allorchè B è un numero intero, quanto allorchè è frazionario. E se v' è bisogno di ricorrere all' esempio non per chiarire le idee ricevute nella definizione, il che comunemente avviene e suol farsi a buon diritto, ma per

acquistare delle idee che dalla pretesa definizione non erano suggerite, la vera definizione sarà implicitamente chiusa nell' esempio, verrà data alla occasione dell' esempio; e tornerà vero il già detto, che è in vece una semplice osservazione di analogìa la definizione pretesa. Essa non ci mostra in fatti il vero spirito della operazione, dalla cognizione del quale possa colla massima facilità dedursi in quali circostanze vi si debba ricorrere. E questo spirito dell' operazione dobbiamo procurare di far noto, se vogliamo, lo dirò colle parole di Romagnosi, *che il mondo non sia condannato a contentarsi di un cieco meccanismo, anzichè ottenere una filosofica derivazione dell' arte di calcolare*, se vogliamo che l' operazione stessa sia fruttuosa, mentre intanto importa il conoscerla, in quanto che già si conosce in quali circostanze vi si possa fare ricorso.
II. La pretesa definizione *contiene* inoltre *delle idee superflue*. Esprime dessa in fatti un concetto vero sì ma non essenziale. E che ciò sia, risulta a piena evidenza da questa osservazione, che cioè l' essenziale concetto della moltiplicazione sì per interi che per frazioni, può aversi indipendentemente affatto dalle idee che l' esposta definizione ci suggerisce. Moltiplicare A p. es. per 5, significa *ripetere* A cinque *volte*: ecco la vera idea della Moltiplicazione per un intero. Moltiplicare A per $^5/_6$ (espressione che abbiamo già veduto per quali ragioni di analogia si usi in vece dell' altra *prendere i cinque sesti di* A) significa *dividere* A *per* 6 *ad oggetto di prenderne il sesto, e moltiplicare poi l' ottenuto quoto per* 5 *ad oggetto di ottenere i cercati cinque sesti di* A: ecco la vera idea della moltiplicazione così detta per frazione. Che poi l' eseguire le indicate operazioni sulla quantità A sia un far subire ad A quelle operazioni medesime che ha subito l' unità per divenire $^5/_6$ (ed in vero 1 diviso per 6, e poi moltiplicato per 5 diviene $^5/_6$), ella è una osservazione accessoria, verissima ed utile

aggiungiamo pur anche: ma tanto è falso che essa formi parte essenziale del concetto di quella duplice operazione che si è chiamata moltiplicazione per frazione, che anzi di questa acquistano gli Allievi una chiarissima idea senza attendere per nulla alla osservazione in discorso. E di più se l'osservazione venga loro presentata senza premettervi quelle poche nozioni, che ho per lo addietro esposte affine di denotare che cosa s'intenda per moltiplicazione per frazioni, essi avvezzi d'altronde a conoscere cosa realmente significhi moltiplicare per un intero, avvezzi a dare alla parola *moltiplicare* il suo naturale significato di render multipla, ossia di ripetere un dato numero di volte una quantità, non trovansi della definizione soddisfatti, e sovente chiedono in vano a sè stessi per qual ragione debba chiamarsi moltiplicazione per frazione e per es. moltiplicazione per $^5/_6$ quella operazione per cui si fa subire ad un numero ciò che subisce l'unità affinchè divenga $^5/_6$. Se tu dici « *moltiplicare* A *per la frazione* B *significa dividere prima* A *pel denominatore della frazione* B, *e poi moltiplicare il quoto pel di lei numeratore ad oggetto appunto che* A *subisca quella operazione che l'unità subisce per divenire la frazione* B, credi tu che gli Allievi rimangano più soddisfatti di questa spiegazione che loro esterna i metodi della operazione, occultandonè l'origine, i mezzi, lo scopo, di quello che il sieno delle analitiche investigazioni che ho antecedentemente esposte, mercè le quali sono per mano condotti a conoscere la ragione delle cose? Bisognerebbe aver rinunciato al senso comune, ed aver fatto ben meschini progressi nell'arte preziosa di communicare le idee per rimanersi nel bivio perplessi. Disingannatevi dunque: e quando siete tentati a riguardare, siccome vari moderni hanno fatto, la citata proposizione di Cauchy, che d'altronde esprime un'utile verità, per una vera definizione, ecco io dirovvi, per poco che mi son fatto a scortecciare

questo bel pomo tanto applaudito, vezzeggiato, idolatrato, ecco, guardatelo bene, io vi ho discoperte le sue magagne, i suoi vizi le sue deformità, *ecce quem colebatis!*

62. Conchiudo io dunque 1.° Che *moltiplicare significa render multipla una quantità, ossia ripeterla un dato numero di volte* e null' altro; nè le mie dilucidazioni aggiunte apportano a questa chiara e precisa idea la menoma alterazione. 2.° Che perciò il moliplicatore essendo un numero indicante ripetizione esser debbe intero; ed è perciò assurdo il moltiplicare per frazione. 3.° Che ciò null' ostante torna comodo e per brevità e per certe analogie il chiamare col nome di semplice moltiplicazione per frazioni una duplice operazione consistente in una moltiplicazione precedata (o per comodità di processo seguita, giacchè il risultato è lo stesso) da divisione appunto perchè così si sciolgono problemi analoghi a quelli che la semplice moltiplicazione risolve. 4.° Che se ciò riesce utile e comodo, non per questo segue che la così detta moltiplicazione per frazioni cessi di essere una duplice operazione, e divenga una operazione individua, perchè è abusivamente così chiamata, giacchè la osservazione che non si può moltiplicare a rigore per un moltiplicatore che sia frazione, e che invece si moltiplica pel solo numeratore dopo aver diviso pel denominatore, è una osservazione verissima ed utilissima.

Tutte le analitiche nozioni che abbiamo esposto intorno al significato del moltiplicare per frazione ci procurano dei vantaggi. Essi fanno sì che sia ritenuta nel suo originario, semplice e limpidissimo significato la parola *moltiplicazione*, siccome operazione che sempre aumenta la quantità; e il rossore risparmiandoci di *jurare in verba magistri*, ci suggeriscono esse stesse naturalmente ad utile sommo della memoria i processi che in pratica dobbiamo porre per eseguire quella duplice operazione cui si dà (impropriamente sì, ma però utilmente) il nome di *moltiplicazione per frazio-*

ne. E di questo nome mi giovo pur io, chiamando *fattori* tanto la quantità (intero o frazione che sia) di cui debbe prendersi una data parte e che suole denominarsi *moltiplicando*, quanto la frazione che indica la parte che debbe prendersene, e che suol appellarsi *moltiplicatore*, sebbene nè all'uno nè all'altro appartenga a rigore il nome che gli si è applicato. Ed in vero il fare uso per brevità di laconiche espressioni, che in istretto senso non sarebbero esatte, fu e sarà sempre permesso agli espositori degli scientifici trattati tutte le volte che sul significato dei nomi siensi fatte le debite avvertenze, e siensi espresse le necessarie convenzioni. La necessità che si ha in Matematica di spesso ripetere dei ragionamenti ci fa ricorrere ai laconismi e la loro utilità è incontrastabile; quando in grazia delle premesse dilucidazioni siasi provveduto ad oggetto che nè l'equivoco possa aver luogo, nè abbia a soffrirne la chiarezza e la verità dei concetti, doti preziose e desiderabili nella esposizione di ogni qualsiasi ramificazione dello scibile umano.

LETTERA IV.ª

Sulle adequate nozioni della Divisione

ARGOMENTO

Più della Moltiplica la Divisione ha bisogno di schiarimenti e sull' oggetto delle sue ricerche e su i suoi rapporti con la moltiplicazione, e sui mezzi con cui ottiene la cosa richiesta (§. 63 al 66) — Nelle divisioni il numero delle parti, o sia esso noto od ignoto, sia cioè o il divisore o il quoto, debbe essere intero; e quando mentisce l' aspetto di frazione, il vero numero delle parti é il solo numeratore, e il denominatore non indica che la precedente moltiplicazione che per esso si è dovuta fare della quantità comunemente ritenuta per dividendo affine di ottenere il dividendo vero (§. 67 al 68) — Quindi i casi di divisione spettanti alle frazioni, nei quali la divisione debbe essere preceduta dalla moltiplica, non possono riguardarsi come un' unica operazione: quindi inutili e difettose le definizioni di Newton, Clavio, Lacroix e Cauchy a questo fine inventate (§. 69 e 70) — Non rende ragione delle cose ed è una petizione di principio la dimostrazione della divisione di frazione per frazione data da Francoeur (71) — E' falso che dividere p. es. per cinque settimi sia dividere per una quantità 7 volte più piccola di 5; e quindi sono indispensabili i sopra esposti dettagli (§. 72.)

63. Se il concetto della moltiplica parve a me bisognoso di qualche dilucidazione, moltopiù sembrommi che schiarimenti avessero a desiderarsi nella divisione, allorchè definita essa venga (come la è comunemente) *per quella operazione mercè la quale si osserva quante volte un numero è contenuto in un altro*. D' altronde io mi sentiva ritroso ad introdurre innovazioni in massime sanzionate dal-

l'uso, in definizioni fin dalla più remota antichità a noi per tradizione pervenute, senza che giammai fossero state menomamente alterate. Mentre però fra queste dubitazioni discorreva la mente, le si veniva pur anche affacciando il riflesso non esservi mezzo più acconcio per accorgersi se siavi o no insufficienza ed inesattezza nei metodi d'insegnamento, che la ponderata disamina delle obbiezioni e delle richieste che da Allievi di svegliato ingegno ci vengono proposte sulle materie che loro si espongono. E mi tornava in pari tempo al pensiere come mi era spesso avvenuto di essere da essi più volte richiesto sul perchè l'osservare quante volte una quantità è contenuta in un'altra debba chiamarsi dividere. In mezzo a questi stimoli della mente, poteva io starmene inerte senza fare soggetto della mia più intensa meditazione il metodo con cui sogliono nelle scuole comunicarsi le nozioni della divisione? Io avrei mancato al debito che ha ogni istruttore di migliorare per quanto egli può il modo di communicare le sue idee, se non mi fossi della cosa occupato con ogni impegno. Lo feci: le mie dubitazioni sul difetto del metodo andavano crescendo quanto più di riflessione io poneva sopra di esso. Finalmente i sospetti si cambiarono in evidenza, e riconosciuta che ebbi ben chiaramente l'utilità del battere un altro sentiere, ecco l'ordine novello che io detti alle mie spiegazioni intorno al concetto della divisione, quale appunto nei miei elementi di Matematica trovasi esposto.

64. Per acquistare giuste idee intorno alla divisione conviene rimarcar bene tre cose. 1º Quali ricerche occorrono in questa operazione. 2º Quali rapporti hanno gli elementi o termini di questa operazione con quelli della moltiplicazione che le è intimamente connessa. 3º Quali mezzi si usino per ottenere ciò che si cerca.

I. Per bene intendere che cosa nella divisione si ricerchi, conviene in 1º luogo notare che lo stesso vocabolo *di-*

visione ci porta a conoscere aver luogo in questa operazione qualche ricerca relativa allo smembramento di un tutto in parti; e che perciò se rispondessimo a chi ci chiede cosa è dividere, che *il dividere è un osservare quante volte un numero è contenuto in un altro* e nulla più, noi daremmo una risposta poco soddisfacente; giacchè niuna idea additeremmo di quelle che risveglia la parola per sè medesima. Conviene poi in 2º luogo avvertir bene che una condizione, la quale sempre nelle divisioni aritmetiche si sottintende, sebbene non espressa, si è che le parti in cui debbe dividersi un tutto sieno eguali fra di loro, giacchè diversamente niun aritmetico risultato sarebbe possibile. In terzo luogo poi rapporto alle parti eguali in cui và il tutto a dividersi due cose sono a rimarcarsi, cioè quante esse sieno, qual sia cioè il loro *numero*, e quale ne sia la *grandezza*, la quale è ben chiaro che è tanto più piccola quanto più grande è il loro numero, e viceversa. Volendosi per es. distribuire 32 scudi fra 8 poveri, noi rimarchiamo che 8 essendo i poveri, che si vogliono beneficare, 8 è il numero delle parti in cui si vuole diviso il 32; e 4 scudi è la grandezza di ciascuna di esse.

Ben ponderati questi riflessi, facciamoci inoltre ad osservare, che, se essendo dato il tutto a dividere, dato pur fosse ancora il numero e la grandezza delle parti, niuna ricerca avrebbe luogo in tal caso, perchè alcun che da ritrovarsi non esiste, quando non v'è nulla d'incognito. Se poi dato essendo al solito il *tutto*, s'ignorasse sì il *numero* che la *grandezza* delle parti, allora per mancanza di dati sarebbe inutile ogni ricerca. Rapporto dunque alla divisione di un tutto cognito, due sole ricerche hanno luogo « 1º. *Dato il numero delle parti se ne cerchi la grandezza*; 2º *Data la grandezza delle parti, se ne cerchi il numero* » Ecco i due soli problemi che possono aver luogo in una divisione aritmetica; e nella soluzione dell'uno e dell'altro con-

siste appunto quella operazione che *divisione* si chiama. Così se data la quantità di scudi 32, vogliamo con questa beneficare egualmente 8 poveri, una tal condizione ci fa conoscere, che 8 esser debbe il *numero* delle parti, e perciò in questo caso, dato il *tutto* che è il 32 ed il *numero* 8 delle parti in che il 32 si vuole diviso, si cerca la *grandezza* di ciascuna di queste parti. Se d'altronde data la quantità di 32 scudi, si stabilisca di distribuirla ai poveri in modo, che ciascuno abbia 4 scudi, tal condizione ci fa conoscere che 4 esser debbe la grandezza delle parti; e perciò in questo caso, dato il tutto che è 32, e la *grandezza* di ciascuna delle sue parti, che è 4, si cerca il *numero* di queste parti.

II. Per conoscere quali rapporti hanno con la moltiplicazione i due generici quesiti che la divisione considera, riflettiamo che il tutto a dividersi, il quale nel nostro caso è il 32 scudi, può riguardarsi formato dalla grandezza 4 di una sua parte, ripetuta 8 volte, ripetuta cioè per tante volte per quante vi è contenuta, riflettiamo cioè che il tutto a dividersi è costituito dalla grandezza di una sua parte ripetuta tante volte per quante ne indica il numero delle sue parti, ossia che è un *prodotto*: che la grandezza di una qualunque delle eguali sue parti ne è il *moltiplicando*, e che il numero delle parti eguali in che si vuole diviso il tutto, è un numero eguale al quante volte si debbe ripetere la grandezza di una parte (che è il moltiplicando) per formare il tutto che è il prodotto, è cioè un numero eguale al *moltiplicatore*. E dopo che abbiamo ben rimarcato questo rapporto tra la moltiplicazione e la divisione, dire possiamo che, quando dato un tutto a dividersi e la grandezza di ciascuna delle eguali sue parti, se ne cerchi il loro numero, il quesito prende questo aspetto » *Dato il prodotto ed il moltiplicando si cerca il moltiplicatore* » E quando dato un tutto a dividersi, e dato il numero del-

le sue parti, se ne cerchi la grandezza, il quesito può prendere quest' altro aspetto « *Dato il prodotto e il moltiplicatore, si cerca il moltiplicando* » Ambi poi questi quesiti possono comprendersi nell' unica seguente espressione « *Dato un prodotto e un fattore, si cerca l' altro fattore* ».

Dopo ciò conchiudere possiamo, che tanto nella divisione, che nella moltiplicazione hanno luogo questi tre termini, 1º il *tutto* o il *prodotto*, 2º il *numero*, e 3º la *grandezza* delle parti che ne sono i *fattori*; e la loro differenza sta in ciò, che nella moltiplicazione sono dati i fattori, ed è ignoto il prodotto: nella divisione è dato il prodotto e un fattore, ed è ignoto l' altro fattore.

III. Finalmente per ottenere ciò che nella divisione si cerca, fa d' uopo di una *reiterata sottrazione*. Ed infatti per conseguire l' intento, per conseguire cioè il fattore incognito, allorche dato sia il prodotto e l' altro fattore, rammentiamoci che il prodotto non è che un qualunque dei suoi fattori ripetuto tante volte quante unità sono nell' altro; cosicchè quante volte il fattore noto trovasi ripetuto nel prodotto, e tante sono le unità dell' altro fattore che si cerca. Il fattore cercato risulta dunque dal *quante volte* il fattore noto, ossia il divisore è contenuto nel dividendo; nè in altro modo può rilevarsi questo quante volte vi e contenuto, che col notare il quante volte questo fattore noto può esservi effettivamente tolto, il quante volte cioè può essere effettivamente sottratto prima dal dividendo e successivamente dai sempre più piccoli nuovi residui che si vanno ottenendo, finchè si giunga ad avere di resto o zero, o una quantità minore del divisore. Questa ripetuta sottrazione è dunque l' unico mezzo col quale si giunge a conoscere il fattore cercato ossia il quoto (*a*).

(*a*) E a schiarimento di questa verità, fissiamo le idee sul solito esempio preso di mira. Se nella divisione cerchiamo il numero, data la gran-

Riunendo ora in poco le tre osservazioni già fatte e intorno a ciò che nella divisione si cerca, e intorno ai suoi rapporti con la moltiplicazione, e intorno ai mezzi per ottenere l' intento, conchiudiamo che « *La* DIVISIONE *è quella operazione per mezzo della quale si giunge a conoscere quante volte il fattore noto di un dato prodotto, cui si dà il nome di* DIVISORE, *è contenuto in questo prodotto che dicesi* DIVIDENDO, *ad oggetto di ottenere l' altro fattore incognito che si chiama* QUOTO, *cioè per ot-*

dezza delle parti, se cerchiamo cioè in quante parti ciascuna del valore di 4 scudi si possa dividere il 32, è evidente che le parti sono tante, quante volte il moltiplicando 4 può essere sottratto dal 32. Se poi dato il numero delle parti, se ne cerchi il valore, se si cerchi cioè nel nostro caso il valore di ciascuna delle 8 elemosine in che vogliamo diviso il 32 scudi, il che val quanto dire, se cerchisi quella quantità che sia 8 volte più piccola, che sia cioè l' ottava parte di 32, è chiaro che per ogni 8 scudi che si tólgono da 32, dar non possiamo che uno scudo solo per ciascheduno degli 8 poveri che vogliamo beneficare: onde è che quante volte gli 8 scudi saranno sottratti da 32, e tante volte uno scudo sarà dato a ciascun povero, e tanti cioè saranno gli scudi che comporranno ciascuna delle 8 elemosine. Chiaro è dunque che se si voglia una quantità 8 volte più piccola di 32, ossia una di quelle parti che in numero di otto costituiscono il tutto 32, si vuole una parte composta di tante unità per quante sono le volte che 8 è contenuto in 32, sicchè può dirsi in genere che per ogni volta che un numero di oggetti eguale al numero delle parti (ed è 8 scudi nel nostro esempio) viene sottratto dalla quantità a dividersi, otteniamo una unità sola per ciascuna delle parti che andiam così componendo, e che perciò quante volte un numero di unità concrete eguale al numero delle parti nelle quali vogliamo dividere la quantità dividenda, può da questa sottrarsi, e tante sono le unità componenti la cercata grandezza di ciascuna parte. Ond' è che conchiuder possiamo che o si cerchi il numero, o si cerchi la grandezza delle parti, si ottiene sempre l' intento ossia il risultato della divisione coll' osservare quante volte la data grandezza, o il dato numero delle parti, è contenuto nel tutto a dividersi; e questa osservazione non può in altro modo condursi a termine che colla reiterata sottrazione del divisore dal dividendo e dai suoi successivi residui.

tenere il moltiplicatore, ossia il numero delle parti del dato tutto a dividersi quando sia noto il moltiplicando che è la grandezza di dette parti, ovvero per ottenere il moltiplicando, che è la grandezza delle parti di un dato tutto a dividersi, quando il moltiplicatore ossia il numero di queste parti sia dato ».

65. Sia lodato il cielo che prendi respiro. Questo lunghissimo periodo, anzi questa prolissa orazione periodica che ci hai schiccherata, e per esporre la quale non ti è più rimasto grammo di fiato in corpo; è una definizione o un trattato? — Qualunque nome piacciavi darle, io vi rispondo, essere essa ciò che è necessario a sapere per formarsi quelle giuste ed esatte idee che voi non avete — Ed eglino, scusaci, se ti importuniamo, ma quel porre nella definizione della divisione la notizia pure che in essa si cerca o il numero o la grandezza delle parti, non è un porvi una cosa inutile o almeno fuori di luogo? Perdonaci, se ti parliamo chiaramente: ma la tua definizione ci sembra un guazzabuglio di materie eterogenee le une appartenenti all' Aritmetica teorica, le altre alla pratica; e non vi è cosa più atta a confondere i Giovani quanto il mostrare ad essi le cose fuori del posto loro. Non sarebbe perciò partito migliore (non prendilo a sdegno te ne preghiamo) il lasciar le cose come stavano prima? Pensaci bene: che ne diresti? — Direi che in tutte queste proposizioni che con soverchia garbatezza mi avete esposto, un solo vero io ritrovo, la necessità cioè di porre in mostra agli Allievi le cose ciascuna nel posto suo: e soggiungovi che per obbedire appunto a questo precetto, è sorta fuori quell' orazion periodica che vi ha spaventati. Quando voi vi chiamate soddisfatti della definizione « *Dividere è un osservare quante volte un numero è contenuto in un altro* », Voi, chieggovi mille perdoni per la libertà dell' avvertimento, voi confondete il puro mezzo meccanico diretto ad ottenere

l' intento che ci prefiggiamo, con lo spirito dell' operazione medesima, il quale nella ora esposta definizione non è espresso. Col credere poi che le cognizioni le quali ci mostrano potersi in una divisione ricercare o il *numero* o la *grandezza* delle parti in cui si vuole spezzare il tutto, sieno inutili o per lo meno fuori di luogo perchè appartenenti queste all' aritmetica pratica, voi venite a supporre, che queste teoriche cognizioni dello spirito della divisione essenzialissime ad aversi, appartengano invece alle sue applicazioni. Ben altro è però, che la cognizione tutta teorica dello spirito dell' operazione apra la strada a rilevar facilmente in quali pratiche circostanze convenga ricorrervi (il che è verissimo) ed altro è che appartenga a queste pratiche circostanze medesime, il che è falsissimo. Se nella stessa idea della divisione io avessi incluse anche le varie circostanze nelle quali è d' uopo farvi ricorso, se p. es. vi avessi inserito che essa vale a trovare il numero delle unità relative più grandi contenute in un dato numero di unità più piccole, vale a trovar p. es. il numero delle lire che è formato da un dato numero di soldi; se vi avessi inserito che essa vale a trovare il prezzo di una sola unità, quando si conosce il prezzo di un dato numero di cose, ec. ec., allora sì che dir si potrebbe aver io nella definizione amalgamato le cognizioni pratiche con le teoriche. Ma quando semplicemente rimarco che per mezzo della divisione si trova o il numero o la grandezza delle parti di un tutto a dividersi, altro allora io non rimarco che l' indole e natura dell' operazione. Senza questa cognizione puramente teorica non è mai sperabile la cognizione delle applicazioni, finchè a questa mancanza non giunga a poco a poco a supplire (e non sempre perfettamente, come vi dimostrerò in una prossima lettera) la logica naturale posta a tortura nel continuo pratico esercizio.

66. Ma se l' antica definizione poc' anzi esposta trovi tu

difettosa, mi soggiungono, siamo persuasi che per tale almeno non riguarderai quella che tu stesso hai in parte adottata, e che trovasi poi, senza i ciondoli da te aggiunti, in vari moderni corsi inserita « *La divisione è quella operazione per mezzo della quale dato un prodotto ed un fattore si cerca l' altro fattore* » — Nò: più tollerabile, ma nemmeu questa io trovo appieno soddisfacente. Essa è più tollerabile dell' altra, perchè ci fa conoscere almeno il vero oggetto della ricerca: non appieno soddisfacente però, perchè fuse ci presenta in una sola espressione le due diverse ricerche che possono in una divisione aver luogo, e che ad oggetto di togliere equivoci è giovevolissimo il ben distinguere — Sarà ciò che tu vuoi: ma non credere di piegarci a rifiutare le esposte definizioni per far buon viso alla tua. Noi sfidiamo chicchesia a negarci 1.° che essa non esiga troppo tempo per essere sviluppata in tutte sue parti: a negarci 2.° che dessa non sia estremamente prolissa, perchè esposta con un frasario che non si addice alla matematica concisione; e a negarci 3.° che idee risveglia troppo sottili e difficili e non proporzionate alle forze digestive degli Allievi — Sconsigliati! E non vi avvedete 1.° che se più ore non v' ha dubbio spender conviene per apprendere le cognizioni che per acquistare soltanto la presunzione di possederle, non per questo può mai dirsi lungo quel tempo che è necessario all' acquisto delle idee esatte? Non vi avvedete 2.°, che matematico è sempre quel linguaggio che è *necessario* a dar la spiegazione delle teorie, giacchè presso i soli pedanti la scienza delle quantità emancipata e congedata dalla ragione si va trastullando sui semplici segni? 3.° Non vi avvedete che incapaci a seguire l' andamento degli indicati dettagli, riguardare non si possono senza manifesta contradizione quegli allievi che cinque in sei mesi dopo e nulla più che questi gli si fossero spiegati nelle prime lezioni dell' Aritmetica ragionata,

nel proseguimento del corso voi stessi gli stimate capaci di apprendere le formole delle equazioni di 1.° e 2.° grado, e delle proporzioni e progressioni ec., nozioni che tanto maggior difficoltà presentano certamente di quelle riguardanti la moltiplicazione e divisione di cui ho dato un qualche sviluppo?

67. Acquistate così giuste ed esatte idee intorno alla divisione, cade tosto in acconcio il rimarco, che come nella moltiplica, così pure nella divisione esiste il numero delle parti, ossia il moltiplicatore, che essendo essenzialmente intero non può ammettersi frazionario. E da ciò immediatamente segue che non può darsi a rigore un quoto frazione, quando cercasi il numero delle parti, perchè in tal caso il quoto, che è sempre la cosa che si cerca, essendo il numero delle parti, fa d' uopo che sia intero: non può darsi un divisore frazione, quando si cerca la grandezza delle parti, perchè in questo caso fa d' uopo che sia essenzialmente intero il divisore che ne esprime il numero. E da ciò segue appunto che se nei quesiti che esigono la divisione per essere risoluti, la quantità intera che ci determina il numero delle parti che costituiscono il dividendo si renda frazionaria, avviene per questo solo cambiamento, che il quesito non è più risolvibile per mezzo d' una semplice divisione. Ciò non pertanto si conserva il nome di divisione all' insieme di quelle operazioni, cui è d' uopo ricorrere per risolverlo, perchè decisamente lo risolveva una divisione allorchè quel numero, che ora si è reso frazione, era in antecedenza un intero. Due esempi in proposito il *primo* pel caso in cui cerchisi la grandezza, il *secondo* pel caso in cui cerchisi il numero delle parti saranno opportunissimi alla chiara intelligenza delle già esposte osservazioni.

Eccolo per la ricerca della grandezza delle parti. « *Con scudi* 3 *ho libbre* 18: *quante con scudi uno?* » L' inten-

to, è chiaro, si ottiene dividendo 18 per 3, rendendo cioè il 18 libbre tre volte più piccolo, essendo questo un quesito di divisione in cui si cerca la grandezza delle parti, la quale ripetuta tre volte dà 18. Or se io all' intero 3, che indica il numero delle parti, sostituisco la frazione $^3/_4$ e null' altro, dicendo « *con* $^3/_4$ *di scudo ho libbre* 18, *quante con scudo uno*? » In questo caso siccome il problema conserva la stessa indole di prima, così per analogia prosegue a dirsi che è un problema di divisione; e come prima si otteneva l' intento, dividendo 18 per 3; così ora si dice che si ottiene l' intento, dividendo 18 per $^3/_4$. Ma se questa espressione si usa in grazia dell' esposta analogia, ben saremmo in errore se credessimo che questa così detta divisione per frazione fosse realmente nulla più che una divisione. Nel 1.° caso conviene rendere il 18 tre volte più piccolo; ed è chiaro che ciò si ottiene col semplicemente dividere: nel 2.° caso dire non posso di rendere il 18 più piccolo $^3/_4$ di volta, essendo questa una espressione insignificante. La logica naturale però mi fa conoscere che se libbre 18 si hanno con $^3/_4$ di scudo, con scudi tre che è il quadruplo di $^3/_4$ debbe aversi il quadruplo di 18, cioè 18.4 = 72. In grazia di questo semplice riflesso che ci ha fatto moltiplicare 18 per 4, il problema ha preso ora l' aspetto dell' antecedente, perchè dir posso « *se con scudi* 3 *ho libbre* 72, *quante con scudi uno*? » Ed è chiaro che ora l' intento si ottiene dividendo 72 per 3, come sopra si è ottenuto dividendo per 3 il 18. Dividere dunque (come è in uso di dirsi) 18 per la frazione $^3/_4$, quando cercasi la grandezza delle parti, non è un rendere il 18 per $^3/_4$ *di volta* più piccolo ma è un rendere tre volte più piccolo il suo quadruplo.. E ciò mi addimostra che nell' esposto quesito il vero moltiplicatore ossia il vero numero delle parti non è espresso dal $^3/_4$ (lo che sarebbe impossibile) ma lo è dal semplice 3 numeratore della fra-

zione, numero pel quale dividiamo il vero dividendo, che non è già 18, come si dice, giacchè non è dato dal quesito, non è fra le cose note del medesimo, ma si ottiene con una operazione preparatoria che il problema stesso richiede, con la moltiplicazione cioè del 18 pel denominatore 4. Laonde dividere per $^3/_4$ quando trattasi d' impiccolire il dividendo per trovar la grandezza delle parti, è un dividere pel numeratore 3 dopo di aver moltiplicato pel denominatore 4.

Per la ricerca del numero delle parti ecco altro esempio « *Quanto importano libbre* 72, *se ne ho* 24 *per uno scudo?* » Egli è evidente che le 72 libbre importeranno tanti scudi quante volte in esse sono contenute le 24. Ma il 24 in 72 è contenuto tre volte: dunque scudi 3 è l' importo di libbre 72. Ma se ora invece di ricercare il prezzo di libbre 72, quello cercassi d' un numero di libbre inferiore a 24 e dicessi « *Libbre* 24 *importano uno scudo: quanto importeranno libbre* 18?. » per ottenere l' intento non potrei istituire un ragionamento uguale all' antecedente. Dir non potrei le libbre 18 importeranno tanti scudi quante volte le libbre 24 sono contenute nelle 18, poichè 24 in 18 non è contenuto. Pure siccome anche in questo caso il problema presenta l' indole stessa dell' antecedente, poichè niuna variazione si è fatta che del solo numero 18 invece di 72, l' analogia ci porta a riguardare anche questo come un problema di divisione, ed a dire che come prima si otteneva l' intento dividendo 72 per 24, ora si ottiene per mezzo della divisione di 18 per 24. Io osservo intanto che se si trattasse di dividere per 24 il 18 ad oggetto di renderlo 24 volte più piccolo, per ottener cioè la grandezza delle sue parti, io avrei per quoto $^{18}/_{24} = {}^3/_4$. E questo risultato non presenta difficoltà alcuna per essere ben concepito. Ma potrei dire egualmente che $^3/_4$ è pure il quoto di 18 diviso per 24 quando cer-

casi il numero delle parti, ossia il quante volte la parte 24 è contenuta nel tutto 18? *Pars plus toto* voi mi rispondereste è un assurdo: e il $^3/_4$ non può dirsi esserne il risultato, subitochè non può darsi risultato a una richiesta impossibile. Eppure il $^3/_4$ serve all' uopo e mi fa conoscere che $^3/_4$ di scudo si esigono per la compra delle libbre 18. Necessario è dunque di ponderare come quel $^3/_4$ che a rigore non può essere il quoto, pure ci dà il risultato che il problema richiede; e quali idee per conseguenza dobbiamo riferirvi. Cosa indica dunque il risultato $^3/_4$? Che il 24 stia $^3/_4$ di volta in 18? No: la espressione è insignificante. Che in 18 stia il 24 per $^3/_4$ di sè medesimo? No: l' espressione implica contradizione, poichè quando diciamo che il 24 sta in 18, e poi aggiungiamo per soli $^3/_4$ di sè medesimo, veniamo a dire prima che vi è; e poscia che non vi è contenuto. Cosa dunque, sbrighiamoci, quel $^3/_4$ significa? Nò: non potremo giammai conoscerlo, finchè ci ostineremo nell' errore di credere che la divisione di 18 per 24 sia (quando cercasi il numero delle parti) una semplice divisione che ci dia per quoto $^3/_4$, finchè cioè ci ostineremo a riguardare il $^3/_4$ pel vero quoto, giacchè il vero quoto, dovendo esprimere nel nostro caso il numero delle parti, ossia il quante volte, necessita che sia essenzialmente intero. Abbandoniamo l' errore; consultiamo che cosa ci suggerisce il senso comune rispetto al risultato $^3/_4$ ottenuto quando ci siamo posti a cercare quante volte il 24 sta in 18, e vedremo che (nella impossibilità che il 24 sia contenuto nel 18) il $^3/_4$ ci mostra che il 24 è contenuto non $^3/_4$ *di volta* in 18, ma 3 volte nel suo quadruplo che è 72, o ciò che è lo stesso (perchè il rendere quattro volte più piccolo sì il dividendo 72 che il divisore 24 non altera il quoto) il $^3/_4$ ci mostra che non il divisore 24, ma la quarta sua parte è contenuta tre volte in 18 che è il quarto di 72: E per l' esposto que-

sito questa seconda cognizione interessa, facendoci immediatamente dedurre la cosa cercata; poichè se in 18 stia tre volte il quarto delle 24 libbre che si ottengono con uno scudo, conchiudo che il quarto di uno scudo sta tre volte nell' importo di libbre 18; e che perciò l' importo di libbre 18 sia $^3/_4$ di scudo.

Mentre dunque il dire che in 18 *è contenuto* $^3/_4$ *di volta il* 24 è un assurdo, questo convertesi in una proposizione verissima con una semplice posposizione di parole, dicendo « *in* 18 *è contenuto tre volte il quarto di* 24 » ovvero dicendo « *nel quadruplo di* 18 *è contenuto* 3 *volte il* 24 ».

Dall' esposto risulta intanto che nelle così dette divisioni per frazioni quando il risultato è frazionario, il vero quoto non è la frazione che comunemente per quoto riguardasi, il vero quoto non è per es. $^3/_4$, ma il solo suo numeratore 3; e il denominatore 4 è quel numero per cui abbiamo dovuto moltiplicare il così comunemente chiamato dividendo 18 ad oggetto di renderlo suscettibile di poter contenere 3 *volte* (che è il vero quoto) il divisore 24, donde poi la deduzione che se 3 volte stà il divisore nel quadruplo di 24, tre volte sta in 24 il quarto del divisore, cosicchè può anche dirsi che il denominatore indica pure quale è la parte del divisore che è contenuta nel dividendo tante volte quante ne indica il numeratore.

69. Dai citati due esempi risulta intanto che in tutti i casi di divisione il vero numero delle parti è sempre un intero, ed è il solo numeratore, in tutti quei casi nei quali l' analogia e la brevità dell' espressione ci presenta sotto il mentito aspetto di frazione quel termine della divisione (sia il divisore o sia il quoto) che debbe esprimere il numero delle parti, come nei citati esempi abbiamo osservato.

La divisione dunque non cambia significato giammai, e solo per analogia e brevità di espressione si conviene, di

far uso del solo nome di *divisione* per esprimere una divisione che debbe essere preceduta da una moltiplicazione, il che accade, come abbiamo rimarcato negli esposti due esempi, allorchè quella quantità, che quando è intera esprime nei quesìti il numero delle parti, sia nota o sia incognita, passi ad essere frazionaria. Si verifica perciò nella divisione pur anche ciò che nella moltiplicazione osservammo, che quando comunemente si dice di dover moltiplicare o dividere per una frazione, conviene eseguire sulla data quantità la operazione indicata pel solo numeratore della frazione, dopo di avere eseguita pel denominatore l' operazione opposta.

70. Come dunque non può riguardarsi per una unica operazione la così detta moltiplica per frazione ossia la moltiplica preceduta da divisione, così nemmeno la divisione, che debbe essere preceduta dalla moltiplica, e quindi le definizioni della divisione a questo fine architettate da Newton, da Clavio, da Lacroix e da Cauchy, non sono plausibili. Ed in vero, dire con Newton e Clavio che *dividere significa trovare tal quantità che abbia al dividendo lo stesso rapporto che l' unità ha al divisore*, dire con Lacroix e con Cauchy che *dividere é trovare un numero detto quoto che è composto col dividendo, ovvero operando sul dividendo nel modo stesso che si opera sul divisore per ottenere l' unità*, è un dire il vero; ma o non è un definire, o è un definire alla peggio per le ragioni medesime, che rapporto alle analoghe definizioni della moltiplicazione si esposero.

71. Ma sia pur ciò che vuoi, immagino che mi si replichi, perchè introdurre tante distinzioni, tanti dettagli, tante novità sulle dimostrazioni relative ai diversi casi di divisione, perchè non contenerti in un modo consimile a quello praticato dai Classici, e per es. da Francoeur; perchè tanto occuparti nel caso per es. di divisione di frazione

per frazione ad osservare se si cerchi il numero o la grandezza delle parti siccome tu fai, e non camminare per es. sulle sue traccie? Noi vogliamo per tua confusione qui riferire le sue stesse parole, come dal Gasbarri tradotte alla pag. 49 del 1.° tomo delle sue Matematiche pure. « *Per dividere* $^3/_4$ *per* $^5/_7$ *si moltiplicheranno i due termini di* $^3/_4$ *per* 5.7 *il che darà* $^3/_4 = \frac{3.5.7}{4.5.7} = \frac{3.7}{4.5} \times \frac{5}{7}$. *Ora per dividere per* $^5/_7$, *basta sopprimere il fattore* $^5/_7$, *il che dà per quoto* $^{3.7}/_{4.5}$ *ossia* $^3/_4 \times {}^7/_5$. *Dunque bisogna moltiplicare il dividendo per la frazione divisore rovesciata* ». Questo chiamasi portar nelle cose l'evidenza, far gustar l'indole e lo spirito delle matematiche dimostrazioni, ed esprimersi in pochi decisi tratti di mano magistrale col laconismo e col linguaggio proprio della Scienza che non ama le brodolose e dilavate tue esposizioni — Signori se si badasse al tuono imponente delle vostre parole, si sarebbe tentati di credere che voi abbiate a fondo intesa e pesata la dimostrazione di Francoeur. Ma permettetemi la dimanda. È l'autorità di Francoeur che vi fa prorompere nell'elogio che avete dato alla sua dimostrazione, o realmente sono i pregi intrinseci che nella medesima voi ammirate? Se è la sua autorità, io vi replico che anche in me somma è la stima verso questo Matematico insigne, ma la mia stima non è cieca venerazione, cosicchè nè sempre infallibile, nè sempre felicissimo a me si addimostra nell'arte di communicare le idee. Se poi sono i pregi intrinseci dei suoi argomenti, io forse gitto il tempo a parlare con voi, perchè m'avveggo che nei nostri modi di vedere e di ragionare noi, anzichè pel capo, siamo antipodi che c'incontriamo pei piedi. Voi stimate felice quel metodo di dimostrare che io trovo difettosissimo: voi trovate matematica evidenza ove io trovo petizioni di principi, voi tutta chiarezza e lo splendore della dimostrazione, ove io trovo appena la fioca lu-

ce della sua larva, per non dirvi le tenebre dell' errore. Non vi fidate delle superficiali apparenze: scalfite un poco con l' unghia esploratrice questo panno che sì morbido e lucido e ben apparecchiato vi appare, alzatene il pelo, mettetene allo scoperto e l' ordito e la trama: e i vostri giudizi sul suo pregio non saranno più quelli di prima. Francoeur senza darsi la menoma briga di farci conoscere cosa significhi dividere frazione per frazione e p. es. $^3/_4$ per $^5/_7$, ecco come comincia e manda a termine il suo ragionamento. Io non fo che ripeterlo a note più chiare, sicchè meglio ne facciano risaltare l' orditura, richiamandovi anche alla mente i principj, cui egli appoggia la sua dimostrazione. « *Per dividere $^3/_4$ per $^5/_7$, per far cioè un operazione che non mi curo affatto di farvi conoscere in che consista, io prima d' ogn' altro vi fo sapere che* MI SENTO ISPIRATO *a farvi moltiplicare i due termini della frazione $^3/_4$ per* 5.7, *profittando della cognizione datavi, che una frazione non si altera quando per una stessa quantità* 5.7 *si moltiplichino ambi i suoi termini. Otterreте così* $^3/_4 = \frac{3.5.7}{4.5.7} = \frac{3.7}{4.5} \times \frac{5}{7}$. *Ma in addietro parlando della divisione degli interi, io ho dimostrato che una divisione si eseguisce coll' unicamente sopprimere nel dividendo un fattore che sia eguale alla quantità per cui lo vogliamo dividere: dunque sopprimendo il fattore $^5/_7$, otteniamo per quoto* $\frac{3.7}{4.5}$. » Ma questo *dunque* che a voi apparisce legittimo, non lo è in conto alcuno. La proposizione che *il sopprimere un fattore nel dividendo è un dividere il dividendo pel fattore soppresso*, è una verità, la quale non può dagli Allievi essere accolta che con una distinzione. *Sopprimere un fattore è dividere*: questa è proposizione di cui noi siamo convinti (d' uopo è che essi dicano a Francoeur) quando il fattore sop-

presso sia un numero intero, perchè tu in addietro ce lo hai dimostrato: che ciò sia vero, quando il fattore è frazionario, questo è ciò che ammettere non ti possiamo, perchè fin qui non l' hai fatto conoscere; ed eri nell' impossibilità di farlo, poichè non potevi certamente convincerci che sopprimere un fattore frazionario in una data quantità sia lo stesso che dividere la quantità per questa frazione, sia lo stesso cioè che fare una operazione, di cui non ci hai dato ancora la menoma idea. Ecco i meriti della dimostrazione di Francoeur, su cui mi avete invitato a richiamar la mia riflessione. E Voi, (permettete che io vi scuota e punga un poco il vostro amor proprio, e vi istilli il sentimento della vergogna di essere stati fin qui ostinati seguaci di tanti pregiudizi) e voi, non so se più illusi o contenti, vi beate in queste da voi così dette pennellate di mano maestra? E questo è per voi il metodo felice, la matematica evidenza, la chiarezza, lo splendore del vero che ci decantavate pocanzi!!! Non vi fidate nella sola autorità, poichè *quandoque bonus dormitat Homerus*. E se la pretesa dimostrazione di Francoeur ci lascia nel desiderio di conoscere che cosa significhi *dividere per una frazione*, cosa significhi nel citato esempio dividere $^3/_4$ per $^5/_7$, sarà colpa degli Allievi o non piuttosto vergognosa colpa del metodo dell' insegnamento, se smarriti in tutt' altro mondo eglino si trovino, quando passano alle applicazioni?

72. Avete ragione, mi sento replicare: conviene dar principio dallo spiegare cosa sia dividere $^3/_4$ o in genere una quantità c qualunque per $^5/_7$: ma per far ciò, non v' è al certo bisogno di scarabocchiare tante pagine, siccome voi fate. Dividere c per $^5/_7$ significa divider c per una quantità sette volte più piccola di 5. Per ottenere l' intento dividiamo c per 5; ma l' ottenuto quoto $^c/_5$ è sette volte più piccolo del vero, perchè abbiamo diviso c per una quantità 7 volte più grande di quella per la quale si doveva

dividere: perchè dunque il *quoto* acquisti il suo giusto valore, fa d'uopo renderlo sette volte più grande col moltiplicare per 7 l' ottenuto quoto $^{c}/_{5}$ scrivendo $^{7c}/_{5}$. Ed ecco con la maggior semplicità del mondo e senza confondere la mente dei giovani colla tua *grandezza* e col tuo *numero delle parti*, ecco data la idea del dividere per frazione, e dimostrato il processo dell' operazione — Non v' insuperbite, miei cari, di questa chiara brevità delle vostre dimostrazioni. Voi siete caduti nell' inganno medesimo di che vi feci avvertiti rapporto alla moltiplicazione pur' anche. Il $^{5}/_{7}$ non vi ha dubbio è una quantità sette volte più piccola del 5: ma io non sò idea alcuna formarmi del dividere una quantità per $^{5}/_{7}$ quando il $^{5}/_{7}$ stà nel posto di quella quantità che debbe esprimere il numero delle parti, poichè se intendo bene che cosa sia rendere cinque volte più piccola la quantità *c*, cosa sia renderla *cinque settimi di volta* più piccola non intendo davvero. Nella pretesa vostra dimostrazione voi supponete che già si conosca cosa sia dividere per $^{5}/_{7}$, supponete cioè quello che dovete spiegare; e con questa così solenne petizione di principi suggerite i processi per ottenere i risultati d' una operazione di cui non vi siete curati darmi una idea. Non soddisfatto della dimostrazione che mi avete suggerita, e che è quella stessa appunto che da giovinetto appresi pur io, così allora ragionava con me medesimo. Quando mi si dice che una quantità va divisa per una frazione per es. per $^{5}/_{7}$, quali sono le esatte e chiare idee che io annetto a queste parole? Io stetti un istante pensoso: poi tutto fù preso il mio spirito dalla più mortificante vergogna, imbarazzato trovandosi nel dare risposta ad una dimanda che riconosceva ad un tempo la più ragionevole e naturale. In quello stato di avvilimento, altro meschinissimo rifugio io non ebbi, che quello arrecatomi dal riflesso che mi surse in pensiero, che forse solo non sarei a trovarmi in imbarazzo, se altri pure

al medesimo esame di coscienza si assoggettasse. La dimostrazione lascia dunque qualche cosa a desiderare, lascia anzi a desiderare la prima e più importante notizia, qual' è la giusta idea dell' operazione. Ed in vero come mai si potrà giungere a conoscere in quali casi dovrò a questa operazione ricorrere, se non sò che cosa sia? E come potrò mai esser pago di quel metodo d' insegnamento che mi ammaestra a fare, senza prima farmi conoscere chè sieno le cose che si fanno? Queste idee io andava tra me e me rugumando, e con lunghe e ripetute investigazioni giunsi a riconoscere essere necessario il dimostrare per mezzo di opportuni sviluppi che sotto *le parole dividere per* $^5/_7$ altro non possiamo intendere che *dividere per 5 dopo aver moltiplicato per 7*.

Certi sviluppi, certi dettagli, certa avversione ad una fatal brevità, io vorrei che vi veniste persuadendo essere indispensabili nell' insegnamento, se non vogliamo tradire il ministero dell' istruzione, se ci stia a cuore che acquistino gli Allievi esatte e giuste idee delle cose, e quindi che non effimero, non apparente ma vero sia il loro profitto, guiderdone il più consolante che ricevere possano le nostre fatiche.

LETTERA V.ª

Sulla teorica dei criteri relativi alle applicazioni della Moltiplica e della Divisione

ARGOMENTO

Spesso nei quesiti in cui havvi qualche termine frazionario stanno gli Allievi perplessi se debbano sciogliersi con una moltiplica o con una divisione. Dare criteri in proposito è dunque util cosa (73 al 75) — Le quantità su cui si agisce in un calcolo sono tutte omogenee: sebbene delle eterogenee esistano nei problemi di moltiplica e divisione. In essi poi havvi sempre il *tutto e la grandezza delle parti* che sono omogenee, ed una quantità eterogenea che delle parti determina il *numero*; ed appartengono alla moltiplica se cerchisi il tutto, alla divisione se la grandezza o il numero delle parti (§. 76 al 78) — Nei quesiti di moltiplica ambi i termini noti sono eterogenei: in quelli di divisione poi se i due termini noti sono omogenei, il quoto determina la quantità eterogegenea: se i due termini noti sono eterogenei il quoto è omogeneo al dividendo (§ 79 all' 81) — E' falso che ragionatamente si sciolgano quesiti di moltiplica e divisione che contengano termini frazionari colla semplice regola del tre senza le esposte teoriche (§. 82.) — E' falso che l' apprendimento di queste sia difficile (§. 83 e 84.) — Bisogna però abituare gli Allievi ad applicarle (§. 85 e 86.) — A sviluppare poi negli Allievi lo spirito d' investigazione giovano non gli aridi laconismi, ma le chiare e sviluppate dimostrazioni, le quali (se non della moltitudine) hanno il suffragio dei Dotti (§. 87 e 88).

---

73. Nelle scorse due ultime lettere sembrerà forse a taluno che io confutando molte delle ideate obbiezioni, una ne abbia trascurata tra le altre. E notate, mio caro Amico, in proposito di tali ommissioni, questa essere spesso la tat-

tica di coloro che amando sostenere più l' assunto impegno che la verità, si fanno ad affastellare insieme fra le obbiezioni che loro si sono fatte, quella ancora contro la quale ad addurre e sostenere ragioni si sentono deboli in gamba, e mentre si fanno a sviluppare il fastello e l' una obbiezione dopo l' altra a prender di mira per farne la debita confutazione, quella, ad abbatter la quale molto buona polvere da sparare non hanno, intrusa qual sottil ramoscello fra gli altri più grossi, e quasi dalle loro foglie coperto, come se fosse inosservato, trascurano. Così speranza essi nutrono che buona parte degli uditori avendo intesa la confutazione di molte, non si avveda della artificiosa lacuna, e quelli fra essi che di questa mancanza si accorgono, abbiano in buona fede a ritenere, che avendo l' autore a molte difficoltà risposto, il non essersi occupato di una, sia stata una vera dimenticanza.

Avrei per esempio a tale stratagemma fatto ricorso pur io rispetto all' affacciatami inutilità di avere introdotto le idee di *tutto*, di *grandezza di parti* e di *numero di parti* nella definizione della moltiplica? Io ho significato allora di volere, tra le altre varie, confutare l' opinione ancora di coloro che credono inutili queste addizioni: ma che io nel mentre che ho diverse obbiezioni distrutte, mentre ho pure dimostrato che le mie addizioni non si oppongono al primitivo concetto della moltiplicazione, che io di fermo proposito, ed *ex professo* abbia preso a difendere la loro utilità, specialmente rapporto alla moltiplicazione, egli è ben vero che voi potete negarmelo. Sarebbe mai stata questa un' affettata dimenticanza? No: tali sospetti, se mai vi fossero, non sarebbero fondati. Se in antecedenza io non ne ho parlato che di volo, egli è ciò avvenuto non già perchè mi trovassi sfornito di prove sufficienti e convincentissime, ma perchè era nel divisamento di dedicarvi quasi per intero la presente lettera, in cui piacemi di darvi con-

tezza come in me nacque l' idea delle esposte dilucidazioni e come a gradi a gradi mosso dai loro vantaggi fui condotto a farne uso nei miei elementi.

74. Io mi avvidi, e chi per qualche tempo si è occupato dell' insegnamento dell' Aritmetica si sarà certamente avveduto più volte, che gli Allievi mentre non incontrano mai alcuna difficoltà nel riconoscere se un addizione piuttosto che una sottrazione si esiga per la soluzione di un problema, spesso poi si trovano imbarazzati a distinguere se debbano ricorrere alla moltiplica o alla divisione quando o l' una o l' altra venga dal quesito richiesta, specialmente allorchè siavi qualche termine frazionario, e il più delle volte indecisi rimangono senza poter uscir di questa vergognosa perplessità.

Meditando più e più volte su questo ed altri simili inconvenienti che a mio avviso sono una prova della poca esattezza dei metodi con i quali suole insegnarsi la scienza dei numeri, io preso a poco a poco mi trovai da un intimo convincimento che utilissimo sarebbe stato lo stabilire, se fosse possibile, dei criteri affinchè col sussidio di essi potessero gli Allievi più facilmente dall' enunciato della dimanda rilevare quali processi valgano a scioglierla. Per molti e molti anni io mi occupai della disamina di questo divisamento, e non solo parvemi scorgere che i sopranominati criteri sommi vantaggi avrebbero arrecato, lumi somministrando per la soluzione dei quesiti i più ovvii a darsi negli usi della vita, ma per l' intelligenza pur anche di tante formole che vergognosamente si studiano nelle istituzioni di fisica, senza bene intenderne il significato. Fù allora che le definizioni comunemente date delle aritmetiche operazioni e specialmente della moltiplica e divisione, mi parvero insufficienti a somministrare agli Allievi una nozione adequata dell' indole delle medesime da cui potere con facilità dedurre in quali circostanze vadano esse applicate. Quin-

di non per vezzo di novità, ma in seguito di mature riflessioni stimai utile il far distinguere i numeri indicanti oggetti da quelli indicanti ripetizione, l'introdurre qualche modificazione nelle indicate definizioni e molte avvertenze del tutto nuove suggerire rispetto alla moltiplica e alla divisione delle frazioni, sicchè più agevole riuscisse con ciò l'applicazione delle teorie.

75. In seguito di queste innovazioni nella parte speculativa dirette a ben preparare i Giovanetti allo studio di quell' altra parte di Aritmetica che ne riguarda gli usi, io mi accinsi ad occuparmi anche di questa, e percorrendo un sentiero novello mi detti a teorizzare sulla pratica, a richiamare cioè a princìpi le stesse applicazioni ad oggetto di disporre con questo mezzo gli Allievi ad indagare mercè il soccorso di alcune esplorative ricerche, quali sieno le operazioni che nei diversi casi particolari ci fanno conseguire l' intento. E poichè facilissimo è il riconoscere quando occorra fare ricorso all' addizione e quando alla sottrazione nella soluzione dei problemi, siccome d' uopo di sussidi non ha la mente per distinguere quelli che esigono la prima da quelli che esigono la seconda operazione, così l' esame dei criteri va a limitarsi soltanto per la ricognizione di quei quesiti che esigono o la moltiplica o la divisione.

76. Prima d' ogni altro però fa d' uopo richiamare al pensiero che tutte le aritmetiche operazioni possono a due ridursi, addizione cioè e sottrazione: che non potendosi l' addizione e la sottrazione eseguire che sopra numeri omogenei, sopra numeri cioè che sono complessi di unità della stessa natura, ne segue che tutte omogenee fa d' uopo che sieno le quantità sulle quali si agisce in un medesimo calcolo, a qualunque operazione desso appartenga. Nei calcoli però relativi alla moltiplica e alla divisione oltre i numeri indicanti oggetti vi è anche il moltiplicatore, cioè il numero indicante il quante volte la grandezza delle parti va ri-

petuta per formare il tutto; e questo numero indicante non oggetti ma la ripetizione degli oggetti che sono all' operazione sottoposti, spessissimo viene determinato da un numero concreto che il problema ci offre il quale è eterogeneo agli oggetti che debbono essere ripetuti. Fa d' uopo perciò badar bene di non confondere le quantità concrete che si assoggettano ad operazione nel calcolo con le quantità che sono espresse nell' enunciato del problema. Nel calcolo le quantità su cui verte l' operazione abbiamo or provato esser tutte omogenee: nel problema d' altronde spessissimo avviene che sieno enunciate quantità concrete tra loro eterogenee, e quella che è eterogenea alla quantità concreta su cui si opera, non entra nel calcolo, ma per l' indole del problema serve a determinare il numero indicante il quante volte va ingrandita o impiccolita la quantità che le è eterogenea.

77. E perchè possano gli Allievi prendere utili norme in proposito, io fo loro rimarcare cosa, che sebbene ora mi sembra facilissima a dover cadere sotto gli occhi di chiunque, pure sono pochi anni che da me è stata avvertita; e dal non veder farne quel profitto che se ne potrebbe, traggo forti motivi per credere che da ben molti sia inosservata tutt' ora. Quest' oggetto sul quale non si era la mia attenzione in addietro fermata abbastanza, è la esistenza dei tre elementi costitutivi di ogni moltiplicazione e divisione, *tutto*, *grandezza e numero* di parti eguali, elementi che per essere essenziali ed indispensabili, mi credetti autorizzato ad esporli nella definizione di queste due operazioni ad oggetto di farne più agevolmente risaltare gli intrinseci loro rapporti.

Da questo un altro interessante rimarco discende. Tutti gl' innumerevoli quesiti la cui soluzione dipende da una moltiplica o da una divisione per quanto i diversi usi della vita o il capriccio possano presentarceli sotto svariatissime forme ed aspetti, egli è indispensabile che nella intrinseca

loro natura ed indole sieno tutti uniformi, poichè fa d' uopo che il sieno allo spirito di quelle operazioni per mezzo delle quali si risolvono. Egli è dunque indispensabile che tutti sebbene diversissimi, abbiano i tre nominati elementi, il *tutto* cioè (che è il prodotto o il dividendo) la *grandezza* di ciascuna delle parti eguali che il formano (che è il moltiplicando) e il loro *numero* ossia il *quante volte* è d' uopo che per formare il tutto sia ripetuta la grandezza di una parte (e questo quante volte è il moltiplicatore): ed una di queste tre parti è la cosa che si ricerca. Ed è poi ben chiaro che il tutto e la grandezza delle parti che il formano, o in altri termini il prodotto ed il moltiplicando sono necessariamente omogenei, perchè non essendo il tutto che l' assieme delle parti, non può essere di diversa natura da esse. Il quante volte poi la grandezza delle parti debbe ripetersi per formare il tutto di rado nei problemi viene sotto questa esplicita denominazione, ma per lo più è determinato da una quantità eterogenea al prodotto e al moltiplicando, il numero delle cui unità per le condizioni del problema immediatamente deriva ed è precisamente uguale al *quante volte* il moltiplicando, ossia la parte debbe essere ripetuta per costituire il prodotto od il tutto. Oltre questi tre elementi havvi poi nei problemi di moltiplicazione e divisione, niuno escluso, una cosa, il cui quantitativo è costantemente l' unità sempre omogenea a quella quantità che determina il moltiplicatore.

78. **Ma** se tanto i problemi che per essere sciolti esigono la moltiplica, quanto quelli che richieggono la divisione convengono in tutti e tre i nominati elementi, in che dunque potrebbe chiedersi differiscono tra di loro, e come si distinguono? La discrepanza tra la moltiplica e la divisione è tutta solamente fondata sulla qualità dell' elemento ignoto. Ed in vero se data la grandezza delle parti e il loro numero, si cerchi il tutto, questo è quesito di moltipli-

cazione in cui dati i fattori si cerca il prodotto. Se è dato il tutto e la grandezza delle parti, questo è quesito di divisione in cui se ne cerca il numero. Se è dato il tutto e il numero delle parti, questo è quesito di divisione in cui se ne cerca la grandezza, cosicchè un quesito stesso si può fare appartenere o alla moltiplica in cui cercasi il tutto, o alla divisione in cui cercasi il numero, o alla divisione in in cui cercasi la grandezza delle parti, secondo che per incognito si prenda o il prodotto, o il moltiplicatore, o il moltiplicando.

79. Ad oggetto però di facilitare agli Allievi il mezzo di conoscere quale l'indole dei problemi esser debba, affinchè sieno risolvibili o con la moltiplicazione o con la divisione, facciamoci ad analizzarne uno almeno, e da questa analisi deduciamo regole ed osservazioni che sieno applicabili a tutti gli altri casi consimili.

Sappiasi p. es. che *soldi* 9 è il valore di *una libbra*, e che *soldi* 36 è il valore di *libbre* 4. Qui noi troviamo quattro termini, due omogenei, uno dei quali è l'unità e sono *libbra una*, *libbre quattro*, ed altri due omogenei tra loro, ed eterogenei ma corrispondenti ai due primi, quali sono i *soldi nove*, e i *soldi trentasei*. Il termine libbre 4, ossia il termine omogeneo all' unità (libbra 1) ci determina il moltiplicatore, perchè ci determina il numero delle parti di uguale grandezza che formar deggiono il tutto, determina cioè *quante volte* va ripetuto il soldi 9 per produrre il tutto, che è soldi 36. Quindi il termine soldi 9, cioè l' eterogeneo corrispondente all' unità (alla libbra) è il moltiplicando, perchè esprime la grandezza delle parti, la grandezza cioè che si debbe ripetere; e il termine soldi 36 (l' eterogeneo cioè che corrisponde non all' unità, ma all' omogeneo dell' unità, qual' è libbre 4) è il prodotto, ossia il tutto che nasce dal ripetere quattro volte il moltiplicando soldi 9.

Di queste quattro quantità una essendo sempre l'unità, non può essere incognita : incognita può però ben essere una qualsiasi delle altre tre , cioè o il *tutto*, o il *numero* , o la *grandezza* delle sue parti , e quindi proporsene la ricerca . Ciò posto , secondo che l' una o l' altra delle citate tre cose è l' incognita , può l' enunciato nei seguenti tre modi divenire un problema . I. Sia ignoto e quindi si cerchi *quanti soldi costino libbre* 4 , *posto che soldi* 9 *sia il valore di una libbra* . La cosa cercata in questo caso è il termine eterogeneo corrispondente a libbre 4, è cioè il corrispondente del termine omogeneo all' unità , è cioè il prodotto : e quindi il problema esige la moltiplicazione ; poichè dato il moltiplicando che è soldi 9 , ed il moltiplicatore *quattro volte* , dedotto da libbre 4 , si cerca il prodotto . II. Sia in vece ignoto , e quindi si cerchi *quante libbre possano comprarsi con soldi* 36., *posto che soldi* 9 *sia il valore di una libbra* . In questo caso la cosa cercata è il numero delle libbre, termine omogeneo all' unità , che si deduce dal numero delle parti , e quindi il problema esige una divisione diretta al ritrovamento del numero delle parti , ossia del moltiplicatore , dato il prodotto 36 e il moltiplicando 9. III. Sia finalmente ignoto e quindi si cerchi *quanto costi una libbra* , *posto che libbre* 4 *abbiano importato soldi* 36. La cosa cercata in tal caso è l' eterogenea corrispondente a libbra 1 ,. ossia all' unità , è cioè la grandezza delle parti , e quindi il problema esige una divisione diretta al ritrovamento della grandezza delle parti , ossia del moltiplicando , mentre è dato il prodotto 36 e il moltiplicatore 4.

Analisi consimili sopra vari altri esempi io ho dettagliate nei miei Esercizi pratici , posti in fine al mio Trattato di Aritmetica stampato in Perugia nel 1847 ; e molte e molte consimili specialmente sopra quesiti che abbiano dei termini frazionari giova eseguire , e da queste analisi risulterà evidentemen-

te che nei problemi i quali esigono per essere sciolti o una moltiplica o una divisione, debbono verificarsi le seguenti condizioni. E 1.° *vi debbono essere sempre come materia di calcolo quattro quantità, e solamente quattro.* 2.° *Queste quantità non sono nè tutte omogenee, nè tutte eterogenee, ma due sono sempre tra loro omogenee; e le altre due omogenee tra loro, sono eterogenee alle prime, ma ad esse corrispondenti in modo che se l'una si renda dupla, tripla, ec. dupla, tripla, ec. diviene pure l'eterogenea corrispondente.* 3.° *Uno dei quattro termini è sempre espresso dall'unità, ed è sempre il corrispondente della quantità che si debbe ripetere: l'altro omogeneo alla unità, è quello da cui si deduce il numero delle parti: degli altri due termini poi eterogenei ai due detti ed omogenei tra loro, quello che corrisponde all'unità esprime o la grandezza delle parti, cioè il moltiplicando, o una quantità da cui la grandezza delle parti ossia il moltiplicando si deduce: l'altro poi che corrisponde al termine omogeneo all'unità, esprime il tutto ossia il prodotto.*

Quando dato un problema, si verificano in esso tutte le indicate condizioni, desso appartiene infallantemente alla moltiplica o alla divisione, e non può in conto alcuno appartenervi in caso diverso. Ma dopo che si è riconosciuto riferirsi certamente il problema o alla moltiplica, o alla divisione, rimane a conoscersi se vada risoluto o con l'una o con l'altra, e le osservazioni ora esposte ci sono di guida per toglierci di ogni perplessità. Per tale oggetto, abituatevi, io dico ai miei Allievi a scrivere la dimanda, e poi scorrete subito con l'occhio sulla cosa cercata, e sulla cosa espressa da 1, e paragonatele tra loro. Dal confronto che ne farete debbe uno risultare dei seguenti tre casi.

E I. se dal fatto confronto risulta che la cosa cercata è eterogenea alla cosa espressa dall'*uno* e non le è corrispondente, la cosa che si cerca è certamente il tutto detto pro-

dotto (pag. 112). Quindi l' enunciato è un quesìto di moltiplicazione in cui il termine omogeneo al cercato è il moltiplicando, il termine omogeneo a quello espresso da 1 è il moltiplicatore.

II. Se dal fatto confronto risulta che la cosa cercata è eterogenea alla cosa espressa da 1, e le è corrispondente, essa è il moltiplicando (pag. 112); e quindi l'enunciato è un quesìto di divisione in cui cercasi la grandezza delle parti detta moltiplicando, e il termine noto omogeneo al cercato è il tutto detto dividendo, e il termine omogeneo a quello espresso da 1 cioè il moltiplicatore è il divisore.

III. Se dal fatto confronto risulta che la cosa cercata è omogenea a quella espressa da 1, essa è la quantità eterogenea al tutto e alle sue parti che viene determinata dal moltiplicatore, e quindi l' enunciato è un quesìto di divisione in cui cercasi il numero delle parti, perchè serve questo a determinare quella quantità incognita che è eterogenea alle parti ed al tutto.

81. Partendo poi dal riflesso che il tutto conviene che sia sempre omogeneo alle parti che lo costituiscono, e che il numero delle parti è precisato da una quantità ad esse eterogenea, souo corollari indispensabili i seguenti.

I. In tutti i quesìti che richiedono una moltiplicazione, i due termini noti sono sempre tra loro eterogenei, e quello di essi è il moltiplicando che è omogeneo al cercato prodotto.

II. Nei quesìti risolvibili per mezzo della divisione può darsi che i due termini noti dividendo e divisore sieno omogenei, e in tal caso essi sono necessariamente il prodotto e il moltiplicando, ossia il tutto e la grandezza delle parti; e la cosa che si ricerca o è precisamente il *quante volte* la parte è contenuta nel tutto, o è una quantità eterogenea al dividendo e al divisore che da questo *quante volte* è determinata. Quindi *nelle divisioni in cui cercasi il numero*

delle parti, dividendo e divisore sono omogenei, e il quoto determina una cosa ad essi eterogenea.

III. Nei quesiti risolvibili per mezzo della divisione, può darsi che i due termini noti dividendo e divisore, sieno eterogenei, ed in tal caso essi sono necessariamente il tutto ed il numero delle sue parti che viene determinato dalla quantità eterogenea al tutto; ed in tal caso la cosa che si ricerca ossia il quoto è necessariamente la grandezza delle parti, e perciò necessariamente omogenea al dividendo. Quindi *nelle divisioni in cui cercasi la grandezza delle parti, dividendo e divisore sono eterogenei; il quoto è omogeneo necessariamente al dividendo.*

82. Ma senza tutto questo imponente apparato di spinose osservazioni, mi potrebbero alcuni istruttori ripetere, noi facciamo sciogliere ai nostri Allievi i quesiti che esigono la moltiplicazione e la divisione quando vi occorrono dei termini frazionari, con unicamente applicarvi la semplicissima regoletta del tre, che ci dispensa dall' osservare se il problema richiegga o l' una o l' altra delle sopranominate operazioni, e ne dispensa dal prestare attenzione e al tutto e alla grandezza ed al numero delle parti e all' omogeneità all' eterogeneità e a tanti altri dinderli inutili che tu ci vai almanaccando. Si cerca p. e. *cosa importano $^3/_5$ di libbra se $^7/_8$ hanno importato uno scudo?* Ebbene: noi diciamo tosto come $^7/_8$ sta ad 1, così $^3/_5$ ad x; e dividendo per l' estremo noto il prodotto dei medi, otteniamo l' intento in seguito dei principi dimostrati nelle proporzioni, senza tanto obbligare i poveri Allievi a ravvolgersi smarriti per entro al complicatissimo labirinto nei di cui andirivieni tu vuoi costringerli andare in cerca del tutto, della grandezza e del numero delle sue parti — Ed io: no (e un no lampante e sonoro a cotesti istruttori indirizzo) no, non imbroccate nel segno. La vostra regoletta del tre, applico al caso nostro una vieta ma opportuna risposta, *o non*

bisogna o non basta. Se agli Allievi avete bene esposte le teorie relative alla moltiplicazione e divisione delle frazioni, il ricorso alla regola del tre sarebbe un inutile impaccio; ed in tal caso, ecco che la *regola non bisogna*. Se poi le giuste teorie sulla moltiplicazione e divisione delle frazioni non sono state esposte, e credeste che venisse allora per mezzo della regola del tre data ai Giovani la dimostrazione dei processi; siete in un solennissimo inganno, poichè nell' eseguire la moltiplicazione e divisione che essa prescrive, avviene (quando i termini della proporzione sonō frazionari) che gli Allievi eseguiscano operazioni di cui non intendono la forza, perchè non sono state loro spiegate; ed allora la semplicissima regola, se è sufficiente per ottenere i risultati, *non basta* per la dimostrazione de' processi, che non sono dalla medesima in conto alcuno sviluppati.

83. Di pur ciò che tu vuoi, mi si replica, ma non possiamo a dir vero comprendere come tu ragionevole come sei, ti sii voluto ficcar nel capo che gli Allievi possano tener dietro alle sottili osservazioni dei citati criteri, a così astruse dottrine, sè difficoltà somme proviamo a concepirle noi stessi! — Zitti per carità che non vi ascoltino que' Giovanetti che di queste da voi credute sottili osservazioni ed astruse dottrine già trovansi in possesso, giacchè correreste pericolo che la immensa difficoltà che voi decantate fosse da essi medesimi riguardata per ridicolosa insulsaggine. Queste novelle nozioni che tanto vi spaventano, sono cose, dicono essi, che abbiamo comprese all' istante. Una torta fù dal Maestro in parti eguali a noi tutti distribuita (eravamo 12) e ne toccò uno spicchio del peso d' once tre per ciascuno. Nel tagliare e distribuire queste parti, ecco, ci disse il Precettore un esempio di divisione. Vedete questa torta di once 36? Ecco il tutto: vedete lo spicchio di once 3 che ora, dividendola, io do

a ciascuno di voi? Ecco la *grandezza delle parti*: notate, queste parti sono 12; e tante ne ho fatte perchè tanti voi siete: ecco in questo 12 che avete rimarcato il *numero delle parti*, che può anche dirsi il *quante volte* convien replicare la parte tre once per formare il tutto 36. Ed in vero ponga ciascuno di voi sul desco il suo spicchio in modo che le parti tagliate si ricombacino: risulterà di nuovo la torta intera, la quale potete ora riguardare come un prodotto formato dallo spicchio di once 3 che è il moltiplicando, ripetuto 12 volte: il 12 è il moltiplicatore. Ed ecco ad un tempo osservati i rapporti fra la moltiplica e la divisione.

Abbiamo inteso benissimo che il prodotto ed il moltiplicando, ossia il tutto e la grandezza delle parti sì nelle moltiplicazioni che nelle divisioni deggiono essere sempre cose omogenee. Ed in vero se la torta è di tutto grano, non può essere di formentone veruna sua parte.

Benissimo abbiamo pur inteso che nella moltiplica e divisione le quantità che si assoggettano al calcolo sono tutte omogenee. Ed in vero se il numero 12 di noi giovanetti è un numero concreto eterogeneo alla torta e alle sue parti, questo numero eterogeneo non entra nella operazione della divisione, ma serve solo per determinare che dobbiamo prendere una parte dodici volte più piccola, ossia dobbiamo trovare una parte che sia contenuta dodici volte nelle once 36, appunto perchè siamo dodici noi nei quali la torta vuole ripartirsi: quindi *il* 12 *Giovanetti* è quantità eterogenea che esiste nel problema, ma non è quantità che appartenga alla divisione che eseguiamo; non appartenendo ad essa che la torta di once 36, la grandezza delle parti once 3 e il 12 volte.

Ben pure abbiamo inteso che rimanendo lo stesso il dividendo, se il divisore cresce, diminuisce il quoto, ben chiaro essendo che se più siamo, meno ce ne tocca, se il mol-

tiplicatore cioè (ossia il numero delle parti) cresce, ciascuna delle parti eguali si rende più piccola .

Abbiamo pure appreso ben tosto che se dividendo e divisore sono omogenei , il quoto è ad essi eterogeneo , poichè se il divisore è omogeneo al dividendo che è sempre il tutto , il divisore convien che sia la grandezza delle parti , cioè il moltiplicando , essendo sempre esso solo omogeneo al tutto : quindi per necessità il quoto debbe esprimere il numero delle parti, ossia il moltiplicatore , ossia il *quante volte ;* e questo quante volte sappiamo che nel problema determina una cosa eterogenea alla torta e alla grandezza di ciascuna sua parte, determina cioè quanti sono gl' individui nei quali la torta si è divisa o deve dividersi .

Parimenti non abbiamo al certo esitato a comprendere che se dividendo e divisore sono eterogenei , il quoto è omogeneo al dividendo . Ed in fatti se il divisore esprime il numero delle parti , il quoto debbe esprimere la grandezza e viceversa : ma nel nostro caso il divisore per essere eterogeneo al tutto dividendo non esprime la grandezza delle parti perchè questa è indispensabilmente omogenea al tutto : dunque il divisore deve necessariamente esprimere il numero , e quindi necessariamente la grandezza debbe essere espressa dal quoto ; ed il quoto perciò necessariamente omogeneo al dividendo . Se abbiamo per dividendo la torta di once 36 , e il divisore è dato dai 12 giovanetti eterogenei alle once 36 , il quoto 3 indica necessariamente la grandezza di ciascuna parte ossia once 3 , parte che conviene sia della pasta stessa di cui è formata la torta cui appartiene .

84. Che se si tratti di moltiplicazioni o divisioni con termini frazionari , nemmeno ciò forma più per noi il menomo imbarazzo , già pratici del secreto facilissimo con cui possiamo liberarcene . La posposizione d' una sola parola basta per rimetterci sul diritto cammino : Ci si dia a moltiplicare C per $^3/_4$. Moltiplicare è ripetere; e noi intendiam bene

che non si può dire *doversi ripetere* $^3/_4$ *di volta la quantità C*. Ebbene correggiamo tosto l' errore dicendo che dobbiamo *ripetere tre volte il quarto di* C. E così quando $^3/_4$ è il divisore; che debbe indicare quante volte dobbiamo impicciolire una cosa; non diciam già che *debbe rendersi C tre quarti di volta più piccolo*, ma che *debbe rendersi tre volte più piccolo il suo quadruplo*: quando il quoto che debbe indicarci quante volte la parte è contenuta in C è $^3/_4$, non dobbiamo già dire, che *la grandezza delle parti è contenuta tre quarti di volta in* C, ma che è *contenuta tre volte nel quadruplo di* C, *ovvero che non la grandezza delle parti enunciata, ma il solo suo quarto è contenuto in* C *tre volte*.

Con queste facilissime sostituzioni, ne sembra che tanto poco d' ingegno si esiga per penetrare il significato di certe espressioni per sè medesime assurde, che noi non sappiamo a dir vero comprendere, come vogliate voi istruttori permettere che i vostri Allievi sentano la vergogna di non saper rendere conto a sè stessi di ciò che dicono e fanno nei casi sopra nominati. Ma in voi sì confitti e ribaditi sono i metodi che avete fin quì adoperati che difficilmente vi risolvete ad abbandonarli. Voi opinate che noi in mezzo a queste novità di *tutto*, di *grandezza* e di *numero* di parti, di cose *omogenee* ed *eterogenee*, nuotiamo contr' acqua e nel torbido, senza comprendere bene ciò che ci è stato insegnato, e noi in vece seguiamo il corso dell' onda corrente e per sì limpide acque nuoviamo, che nulla più. Così vi dicono i nominati Allievi per poco che già siensi esercitati nelle applicazioni degli stabiliti criteri alla soluzione di vari problemi. Deh possano le loro parole più delle mie riuscire efficaci!

85. Difficoltà, non v' ha dubbio, lo avete inteso da essi medesimi, non vi sono: ma trattandosi di qualche cosa di nuovo, negarvi certamente non posso, che un poco di

tirocinio è inevitabile. Alle novità è d' uopo assuefarsi ; e l' abitudine esige del tempo , sì perchè l' acquistino i Giovani , sì perchè l' acquistiate voi stessi . Prima che di questa abitudine fossi pur io possessore , le nuove , sebben da me ideate osservazioni , presentavano anche a me nella pratica una qualche difficoltà , ed io stesso ho dovuto tornare a leggere due o tre volte di seguito le mie cose per intenderle , quando per qualche tempo le avea trasandate , prima di esserne giunto al pienissimo possesso per mancanza di sufficiente esercizio . Quindi è che se vi poneste in capo di far apprendere ai Giovani i *processi* e le *teorie* relative alla moltiplicazione e divisione delle frazioni, impiegando quel tempo stesso e nulla più che siete soliti a spendere per insegnare i soli *processi* , questo sarebbe un pretendere di far imparare la *teoria* delle cose senza impiegarvi tempo di sorta ; e senza tempo non si fà nulla . Se un ora esige l' insegnamento del processo , non v' incresca un' altra impiegarne per l' insegnamento della teorìa . Da tutto ciò intanto io vi prego a rilevare che la difficoltà d' intendere le esposte dottrine , che sperimentate voi medesimi , e che perciò tanto maggiore supponete negli Allievi , non è intrinseca alle cose ; e il sublime esempio ora esposto della torta ripartita negli Allievi , dovrebbe convincervene : la difficoltà che voi provate deriva da quella ripugnanza che ha il vostro spirito a voler occuparsi delle cose dette , a formarne oggetto di studio, e ad impiegar qualche tempo nell' esame degli esempi perchè si formi anche in voi un poco d' abitudine . La difficoltà tutta dunque consiste nel vincere questa vostra resistenza e nulla più . Non vi fate prendere pel naso nè dalla troppa , nè dalla troppo poca stima di voi medesimi . Questa può recarvi a dispregiare qualche cosa di nuovo che possono offrirvi i miei criteri pel troppo cieco rispetto verso que' Cinici che sebbene dotti , pure ignorano qualche cosa , e ciò che *ignorant blasphemant* : quella può

indurvi a dispregiare tutto ciò che non è parto del vostro ingegno. Spogliati di questi pregiudizi, io sono certo che voi gusterete gli esposti rilievi e li conoscerete ben utili, come utili sono stati riconosciuti da uomini la cui sola racnoide pesa più di tutto il mio cerebro.

Io vi prego a rammentar qualche volta il fatto sì bene nelle storie rimarcato di Cremonino il Peripatetico, del quale si narra che non volle giammai nemmeno toccare (quasi per pericolo di contrarne contagio) il telescopio di Galileo, e più volte da quel sommo invitato ad ammirare il Cielo col suo novello istromento, sempre ostinatamente si rifiutò per la paura di essere costretto a confessare che i Cieli non erano di cristallo, siccome avea Egli appreso non solo, mà pur anche con molto calore della Cattedra sostenuto a molti suoi Allievi. Signori, il vostro ribrezzo a meditare seriamente sulle cose che formano il soggetto di queste mie lettere, di grazia, *si licet in parvis exemplis grandibus uti*, avrebbe mai qualche cosa di somigliante con la ritrosìa di Cremonino? Questa è dimanda che amo di farvi tra me e voi soli, ed alla quale non esigo risposta, perchè non ho alcun desiderio che al pubblico apparisca avere voi fin qui coltivato pregiudizi ed errori. Ciò che io bramo si è che non li coltiviate più in avvenire, e che tale ne prendiate e ne dimostriate ripugnanza, da fare anzi apparire che non gli abbiate coltiveti giammai.

86. Ciò di cui caldamente vi prego si è che non traggiate motivo di dispregiare queste teoriche sulla moltiplicazione, divisione e relativi criteri, dalla poca proprietà, dal non felice modo con cui io possa averle esposte. Io avrò scritto male, e Voi potete scrivere ed esprimervi mille volte meglio di me: ma l' avere esposta male un' idea, non porta alla conseguenza che l' idea non sia giusta: ed io vi assicuro, e ne ho prove di fatto, che il far apprendere ai Giovani quelle teoriche e quei criteri è cosa utilis-

sima, e l'abituarli ad applicare gli stabiliti criteri a molti e molti quesiti, affine di riconoscere, se essi esigano la moltiplica o la divisione, è un esercizio utilissimo che certo io credo di non raccomandar mai abbastanza agli istruttori dell' Aritmetica. Così gli Allievi si addestrano ad afferrare subito lo scopo della quistione: si avvezzano a sbarazzarlo dalle cose accessorie fra le quali è avviluppato: acquistano pratica a ben distinguere quelle quantità che, sebbene nominate nel problema, non hanno influenza alcuna nel calcolo perchè estranee all' oggetto delle nostre ricerche, e dispongono la mente a tosto conoscere qual operazione si esiga per rinvenirlo. In tal guisa riesce loro più dilettevole l' apprendimento della Scienza stessa perchè il loro amor proprio ha la dolce soddisfazione di vedere come giungano essi medesimi in grazia della propria riflessione a trovare le regole necessarie a porsi in pratica per la soluzione dei quesiti. Così gli Alunni formano quello spirito d' investigazione tanto utile alla scoperta del vero, spirito d' investigazione che non si acquista senza lungo esercizio, e se non si rinunzia per tempo a quel pernicioso metodo d' istruzione che io credo di aver ben delineato con quel verso « tu fa così, nè mai curarti d' altro » che pur vi ho altra volta accennato.

87. Io ho veduto Giovani a questo metodo abituati, sebbene forniti di sufficiente ingegno, bevere come un torlo d' uovo i più palpabili assurdi, e piegarvi la loro credenza come la piegherebbero al più palpabile assioma: io gli ho veduti, e me ne fanno fede questi miei occhi medesimi, gli ho veduti disposti con i più lieti visi del mondo a far poltrire nell' inerzia il loro intelletto e provar noja e fastidio al più lieve uso delle sue facoltà cui vengono stimolati, al più piccolo esercizio di quel dono pel quale la Provvidenza gli distinse dai Bruti. Questi giovani, obbrobrio della stirpe umana, potrebbero rassomigliarsi a que' compa-

gni di Ulisse che imbattutisi nell' isola della Maga Circe, e là convertiti in irragionevoli animali, dopo che furono ritornati al primiero aspetto umano, per le solerti premure, le insistenti preghiere, e le potenti intercessioni del loro Capitano, anzichè professargli gratitudine, gli palesarono la dispiacenza in cui erano di non aver proseguito a rimanere bestie, e di aver cessato esser talpe. Ma questa inazione della mente, questa avversione al pensare del proprio che in alcuni rinveniamo, deh! non sia favorita da que' metodi d'istruzione riprovevolissimi che a tutt' altro che alla ricerca e allo scuoprimento dei rapporti avvezzano la mente.

88. Per abituar i Giovani a questo spirito di ricerca le lunghe deduzioni non vi sgomentino. Quel *lucidus ordo* nelle idee che dovete communicare, vi stia in cima d'ogni pensiero: Se vi dà l' animo di far uso di breve chiarezza, non vi lasciate sfuggire di mano quest' Araba Fenice, ma alla chiarezza lunga non vi venga giammai il ghiribizzo di preferire la breve oscurità o la breve inesattezza. Limpide e ben disposte sieno le dimostrazioni vostre: fate che tutte contengano il succo della Scienza, sicchè facilmente possano gli Allievi, quali Api ingegnose, convertirlo in grazia delle digestive loro forze, in proprio sangue, in propria sostanza. Sì: ve lo dirò con le parole di Seneca, tali sieno le vostre lezioni che da esse *quasi ex floribus succum ducant qui protinus sit mel*.

Che se la proprietà di esporre la Scienza in modo da esser quasi come agevolmente succiata e quasi subito assimilata dagli Allievi, e fatta sostanza loro propria, ben di rado si associa con l'aridità dei sunti e dei manuali, badate bene di non cadere nell' opposto difetto di una soverchia prolissità. Prolissi in somma giammai: lunghi però siate sempre quanto la chiarezza lo esige. Gli epiloghi affacceranno ai Giovani il filo dei ragionari se dessi stempe-

rati si fossero in molte parole per isvolgerne il senso (a). Il testo debbe, non v' ha dubbio, lasciare alla lezione orale il dettaglio e lo sviluppo dei particolari esempi, debbe lasciar materia agli Allievi da esercitare la loro riflessione, sicchè divenga un abito per essi il ponderare e l' esaminare da sè, e non si formino un indeclinabile bisogno di non far passo senza che sieno per le benducce tenuti dalla mano del loro precettore: ma *ne quid nimis*. Riflettete che i libri debbono esser fatti per la maggioranza degli Allievi, ed appannagio di questa è la mediocrità, la quale si avvilisce se non trova studiando sul testo dei discreti sussidi: Riflettete che non si è giammai fatto tanta sinistra interpretazione e tanto abuso di alcuna massima quanto dagli Scrittori di corsi elementari lo si è fatto e del precetto di Orazio « *Quicquid praecipies esto brevis* » e dell' altro utilissimo che Laharpe ci ha dato nel suo saggio di Letteratura » *Per ben istruire non bisogna dire tutto ciò che si sa, ma soltanto ciò che conviene a quelli cui s' insegna*. Male applicando questi due ottimi consigli, si sono essi fatto lecito di far man bassa e recidere e storpiare le cose le più difficili e necessarie. Ed in vero va seguito il primo, ma non a danno della chiarezza: va seguito il secondo consiglio col tacere su quelle materie accessorie, che non è necessario l' esporre, ma non già col tacere quegli sviluppi

(a) Gli epiloghi sono per gli Allievi utilissimi. Per mezzo di questi osservano d' un colpo d' occhio tutta la studiata materia, tutto il percorso cammino, e la memoria vi trova il più stabile appoggio.

Gli epiloghi sono anche per gli Scrittori il *lapis lidius* il più efficace perchè conoscano se nelle esposte materie regni quell' unità di condotta quel *simplex dumtaxat et unum*, che se è d' uopo spicchi in tutte produzioni, è condizione *sine qua non* nei corsi elementari. Se dopo scritto un trattato io, provandomi a farne l' epilogo, m' avveggo che non vi si presti agevolmente, tosto deduco che il trattato non è adatto alla istruzione, e torno a rifonderlo di nuovo.

che sono indispensabili a dare le esatte idee delle cose nelle materie che è necessario di communicare alla gioventù.

L' Onnisciente in grazia dei lumi che ci ha compartiti, e che sono tutti suo dono, ci chiama o Istruttori ad essere quasi cooperatori suoi nello sviluppo dell' intelletto e non già della sola memoria dei nostri Allievi, e tocca a noi con un metodo d' insegnamento che gli stimoli a porre in continuo esercizio la loro riflessione, a far di tutto perchè si accorgano di possedere quel prezioso tesoro di che loro fu larga la Provvidenza, e dicano anch' essi con uno slancio di affetto e di gratitudine, *signatum est lumen vultus tui Domine super nos*. Ecco l' altissima e delicata missione a cui siamo chiamati; e questa, permettetemi che parli chiaro, non compiesi col sostituire per amore di brevità al robusto nerbo della dimostrazione, le squallide e vaporose sue larve, quali sono e quei giuochi di lettere, e quelle petizioni di principio, delle quali, no, non iscarseggiano, siccome ve l' ho già in parte fatto, e meglio ve lo farò in seguito toccar con mano, non iscarseggiano al certo le pagine dei corsi elementari delle Scienze . . . .

Su dunque senza tanto servile imitazione dei didascalici corsi stranieri, date mano operosa, o Scienziati Italiani, ai necessari lavori. Scevra di pregiudizi e di errori, nitida chiara, felice (che forza ed ingegno non vi mancano all' uopo) sia la esposizione delle materie elementari in ogni ramo scientifico; e ben potrà allora dirsi essere i testi scolastici il fermo piedistallo su cui con saldezza si erigono i sublimi trattati delle scienze. Che se per queste opere forse non suscettibili della massima brevità, non sarà il suffragio della moltitudine avvezza a tanto più stimare le cose quanto meno si lasciano intendere, queste opere riscuoteranno certamente il plauso dei veri dotti, i quali giudici competenti del merito, ben sanno che tanto più difficile ed arduo è stato un lavoro quanto meno apparisce, e che spesso avviene che quella fatica è maggiore che sa meglio nascondersi.

LETTERA VI.ª

Applicazione delle Teoriche della Moltiplica e Divisione alle fisiche nozioni della velocita' e densita' dei corpi.

ARGOMENTO

Nelle nozioni date dai fisici della velocità e densità dei corpi manca precisione e chiarezza per mancanza di esatte idee sulla divisione (§. 89. e 90.) — Che la celerità sia il rapporto del tempo allo spazio, e la densità lo sia del volume alla massa è un errore (§. 91 e 92) — Non vale a giustificarlo la definizione del numero dato da Newton e sostenuta da Dalembert (§. 93. al 95.): non lo spogliare i numeri di loro eterogeneità con Libes, Hauy, Scinà, Lamè (§. 96. e 97): non il dare all'equazione $c = \frac{s}{t}$ il significato d'una proporzione con Dandalo con Biot con Giorgi con Barlocci (§. 98.): non il supporre con Galuppi essere omogenei lo spazio ed il tempo (§. 100. al 105.) — Lo spazio rappresentante la celerità è lo spazio percorso reso tante volte più piccolo quante sono le unità del tempo impiegato (§. 106. al 111.) — La massa rappresentante la densità è la massa totale del corpo resa tante volte più piccola quante sono le unità di volume che occupa (§. 112). Queste nozioni facilissime derivano dalle esatte idee intorno alla moltiplica e divisione, e la mancanza di queste ha fatto cadere nell'errore Uomini sommi pur anche.

89. Negli elementi delle Scienze fa d'uopo esser brevi. E se per soddisfare a questo precetto hanno luogo talvolta idee poco chiare e precise, se le espressioni divengono per troppa concisione inesatte, poco male, comunemente si dice; la riflessione col tempo appiana, dilucida e corregge.

Da questa massima pur troppo dominante ben fate, caro amico, ad essere alieno. Platone asseriva (a) che *un ammasso di cognizioni mal digerite è peggior male della stessa ignoranza*; e sapete qual ne è la ragione? Chi sa di non sapere affatto una cosa, è assai probabile che venga punto dal desiderio di apprenderla, e soddisfacendolo, ne giunge all'acquisto. Chi di una cosa ha qualche idea sebbene confusa, o è d'avviso di ben saperla, o crede almeno di saperne quanto basti ai suoi bisogni, e quindi la brama di acquistarne adequate nozioni in lui non si desta. Quindi nella confusione e nella inesattezza persiste, e quindi nel suo giusto aspetto non vede la cosa mai più. Le impressioni dei primi studi, lasciano profonde traccie nei nostri intelletti e delle apprese inesattezze in prima età, è ben difficile che si correggano in seguito anche gli uomini sommi. E pazienza, se il male si limitasse ad alcuna delle sole idee primitive: ma v'è di peggio, che queste dovendo servire di fondamento e di base a tutte le successive che insieme concatenate costituiscono la scienza, non può a meno che dalle prime non si diffonda il contagio anche a tutte quelle che in seguito s'infondono nella mente, poichè bene a Lollio scriveva il Venosino « *sincerum est nisi vas, quodcumque infundis acescit*. » E molte prove di fatto io potrei addurvi in proposito: ma poichè nelle scorse lettere vi parlai intorno alle nozioni della moltiplica e divisione, mi limiterò in questa a provare il mio assunto, addimostrandovi come la mancanza di esattezza nelle prime idee di queste operazioni aritmetiche abbia condotto i primi ingegni a commettere degli errori anche sulle nozioni di fisica generale relative alla velocità e alla densità dei corpi.

90. Chi mai crederebbe che in queste nozioni le più elementari, d'un uso e di una applicazione in fisica così fre-

(a) De Legibus Lib. VII.

quente, da tanti e tanti anni introdotte nei trattati della scienza, mancasse e chiarezza di concetto, e uniformità di vedute, e proprietà di espressione? Eppure tant'è! Io mi sono ora preso il piacere di tornare ad osservare lo svolgimento, quale viene dato alle accennate nozioni in oltre venti trattati di Fisica dei più accreditati che io m'abbia fra antichi e moderni: gli ho esaminati con tutta quella ponderazione che era per me possibile: ebbene, quale ne è stato il risultamento? Volete che io vi parli ingenuo, anche a costo di tirarmi addosso la taccia del più presuntuoso uomo del mondo? Niuno ne trovo fra tanti che ne parli con quella esattezza e precisione che convince e soddisfa. Non hanno terminato di uscirmi di bocca queste parole, che già parmi sentire un bisbiglio di voci e di sogghigni che mi rimunera di derisioni — Dunque i fisici quanti mai ne ebbe la terra, tutti sino a te furono ciechi, e tu solo il fortunato veggente? dunque le sole dimostrazioni che escono dalla tua penna hanno la forza d'illuminare il mondo scientifico, che se ne stava fra le tenebre immerso prima che si spargessero i lumi tuoi? Ma la è poi così veramente la cosa, o non farebbe per te a proposito l'avvertimento del celebre Zannotti, il quale dice « *molte volte esser più utile e più conveniente che il Maestro insegni quello che sembra vero a molti, che quello che pare vero a lui solo, se già egli non stimasse sè stesso più che tutti gli altri*. » Ecco le voci che parmi ronzino intorno. Ed a queste che cosa io rispondo? Io rispondo che l'avvertimento di Zanotti è in molti casi utilissimo, ma ha le sue eccezioni e alle fattemi rampogne non sbigottisco per ombra, perchè sento bene di non meritarle. Voi mi supponete dominato, io replicherei, da una presunzione propria di un mentecatto, in grazia della quale io dia un peso esorbitante, un merito straordinario alle mie dimostrazioni, e vedete granchio che voi venite prendendo, io all'opposto dò loro

un pregio si tenne, poichè sì poca è l' abilità necessaria a dedurle, che nulla più. Sono esse conseguenze sì facili delle esatte idee intorno alla moltiplica e alla divisione, che io vi farò toccar con mano saperle trarre anche un fanciullo. Anzichè far pompa di esse, io sono anzi di meraviglia compreso, come non siensi ad altri offerte al pensiero: ed il vedere che uomini abilissimi a communicare le loro idee non abbian saputo dar luogo a quelle osservazioni intorno alle formole della velocità e densità, osservazioni alle quali facilissimamente io sono disceso, dopo che ebbi le mie idee rettificate rapporto alla moltiplica e alla divisione, egli è per me una prova evidente non del merito mio, che so pur bene quanto sia tenue, ma della verità di questa massima » ESSERE GRAVISSIMO IL DANNO CHE ANCHE NEI GRANDI INGEGNI PRODUCE LA INESATTEZZA DELLA PRIMITIVA ISTRUZIONE.

91. Se non in tutti al certo nei migliori corsi di Fisica voi troverete espresso, che la *celerità di un corpo che si muove con moto uniforme è espressa dallo spazio percorso in una determinata quantità di tempo che si prende per unità*: e che *la densità di un corpo è espressa dalla massa che offre sotto una determinata unità di volume*. E fin qui non può desiderarsi esattezza di espressioni maggiore. Ma allorquando i fisici dopo aver data l' idea della velocità e della densità, passano ad esaminare come la velocità di un mobile possa ottenersi da quello spazio qualunque sia, che abbia esso equabilmente percorso in un qualsiasi tempo determinato, e la densità da qualunque massa che un corpo ci presenti sotto un qualsiasi misurato volume, qui è dove che essi non si esprimono con quella precisione che tanto è indispensabile, se vogliamo che ben si apprenda il vero senso delle formole $c = {}^{s}/_{t}$ (la celerità è uguale allo spazio diviso pel tempo); $d = {}^{m}/_{u}$ (la densità è uguale alla massa divisa pel volume).

92. E cominciando ad occuparmi della prima delle due formole, io noto che in quasi tutti i trattati di fisica generale si hanno presso a poco le seguenti espressioni « *Noi non possiamo formarci l' idea della celerità di un mobile, se abbiamo l' idea del solo spazio percorso senza quella del tempo impiegato a percorrerlo, e viceversa se questa, senza l'idea di quello. Spazio e tempo sono dunque due elementi essenziali dell'idea della celerità. Questa risulta dunque del rapporto del tempo allo spazio ossia è espressa dal quoto dello spazio diviso pel tempo* » A questa proposizione però può affacciarsi una difficoltà, si può cioè chiedere in che consista il rapporto dello spazio al tempo, giacchè non è molto facil cosa l' intendere quante volte il tempo sia contenuto nello spazio. E rispetto a questa difficoltà, diverso è il contegno che diversi autori hanno praticato.

93. Taluni veggendo che $c = {}^s/_t$ è formola, la quale applicata ai casi particolari dà giusti risultati, obbligano gli Allievi a contentarsi di questi, dicendo loro che il fisico debbe occuparsi dei fatti, e non perdersi in metafisiche sottigliezze su i principi da cui essi derivano, e quindi nei loro testi (vedete bello sublime espediente per soddisfare al precetto di brevità) non ne parlano affatto. Ed a giustificazione del loro operato si appoggiano alla definizione che dette del numero Newton e sostenne D' Alembert, asserendoci che se a tenore di quanto scrissero questi sommi, i *numeri* non sono che rapporti, se i numeri esprimenti la velocità, lo spazio, il tempo non sono che il quante volte la rispettiva unità di misura è in essi contenuta, agevolmente rileva ognuno da sè, come la difficoltà addotta svanisca.

94. Io però chieggo primieramente a costoro quali sieno per essi le cose utili nell' insegnamento, se ci dichiarano essere inutili e quasi metafisiche quisquiglie le ricerche del significato delle parole e delle formole, donde l' immediata

conseguenza che giusta il giudizio di essi, inutile pur anche sia il desiderio d' intendere ciò che ci si spiega, o si legge? Soggiungo poi inoltre essere talmente viziosa la definizione del numero data da Newton, da non poter questa servire loro di difesa ed appoggio. E a darvi prova dei difetti di questa definizione, io non dirò già col perspicace sempre, ma non sempre chiaro e felice espositore delle proprie sue idee, il Romagnosi, che il dire « *non altro essere il numero che un rapporto, è un esprimere non il concetto positivo del numero, ma solamente la logia numerica* » poichè per addimostrare una inesattezza, non mi piace introdurre una oscurità. Non proseguirò col medesimo a dirvi che *quando pronunzio tre, quattro, cinque, non mi rompo la testa a paragonare*, quasi che questo paragone, questa deduzione del quante volte l' unità stà nel numero, esigesse una improba fatica di mente. Queste sono esagerazioni che io non approvo. Romagnosi, non vi ha dubbio, si esprime bene quando dice « *altro è che nell' esaminare un numero io faccia confronti, pronuncii giudizi da cui emergono idee relative: altro è che queste costituiscano il concetto proprio del numero*. Altro è (aggiungerò io un esempio pur anche) altro è che esaminando il 6, io mi accorga che in esso il 3 è contenuto due volte, altro è che il 6 non consista che in questo puro rapporto, lo che è falso; poichè posso pensare al 6 senza che il detto rapporto sia in conto alcuno esplicitamente avvertito. Ma quì però io non mi fermo, ed a notare proseguo, che se col 6 io confronti non 3 ma 1, che è l' elemento di cui il 6 è composto, le cose cambian tosto di aspetto. E pensando alla idea genetica del 6, pensando che esso non è che $1+1+1+1+1+1$, ossia il complesso di sei unità, trovo questa idea così affine all' altra del rapporto che in 6 l' unità è contenuta sei volte, che quasi mi sembra queste due percezioni confondersi in

una. Quindi a me pare che sia d' uopo piuttosto rompersi il capo per ritrovare quel sottile diaframma che le separa, di quello che romperlo, come teme Romagnosi, per farle discendere l' una dall' altra.

95. Dirò quindi piuttosto, che il definire il numero per un rapporto è un trascurare l' oggetto principale che è il complesso delle unità costituenti la data grandezza considerate insieme riunite, ed in vece porre in prima veduta alla mente quel giudizio del quante volte l' unità è contenuta nella data grandezza, lo che debbe esserne una derivazione. Dirò, che questo giudizio sebbene sia facilissimo, non va confuso con l' idea del numero dal cui confronto con l' unità ha derivazione. Così nel giudizio che 1 è contenuto sei volte in 6, tre sono le idee che si affacciano alla mente, 1.º l' idea dell' 1 che esiste già come idea elementare nella stessa idea composta del 6: 2.º l' idea del 6, ed ecco i due termini sui quali cade il confronto: 3.º e l' idea del *sei volte* che è l' idea del rapporto di quoto d' un termine rispetto all' altro. *Un oggetto*, *sei oggetti*, *sei volte*, ecco le tre idee le quali è indispensabile che sieno presenti alla mente allorchè fa l' esposto giudizio. Or se giusta la definizione di Newton non consistesse il numero che nella pura idea del rapporto, cioè nel semplice *sei volte* nel nostro esempio, mancherebbero i termini su cui istituire il confronto, e questi mancando, è chiaro che il numero sei volte non potrebbe isolato affacciarsi alla mente. Da ciò stesso però io rilevo essere impossibile che Newton e posciа D' Alembert abbiano preteso nella nominata definizione di sostenere l' assurdo che il numero non sia che l' idea di quel puro rapporto che star non può senza la precedente idea del numero stesso e della unità: Eglino debbono avere avuta l' intenzione di esprimere che i numeri indicanti oggetti indicano oltre il complesso delle loro unità anche il rapporto di quoto che con essi ha la stessa

unità. Ma sebbene l'una cosa derivi dall'altra direttamente e immediatamente, pure l'una non può coll'altra scambiarsi, l'una coll'altra confondersi e prendersi entrambe per una cosa medesima, al che c'indurrebbe la più volte citata definizione, essendo ben evidente che le idee degli esseri numerati non debbono confondersi con l'idea dei rapporti che la mente vi scuopre, con l'idea cioè del quante volte l'uno è contenuto nell'altro. Le idee dei primi in fatti sono indipendenti da ogni altra idea: le idee dei secondi non possono esistere indipendentemente dai primi: E Newton non ci avrebbe certamente data, e D'Alembert sostenuta, come fecero; quella inesatta definizione del numero che abbiamo confutata, se avessero bene apprezzata quella distinzione importantissima che io vi esposi (§. 39.) dei numeri indicanti oggetti sui quali si opera nel calcolo e di quelli indicanti ripetizione, indicanti cioè le volte che un numero esprimente oggetti è contenuto in altro omogeneo, ossia le volte che bisogna ripetere l'uno per formare l'altro: tanto l'esattezza delle nozioni elementari è necessaria!

Quindi è che non potendo la definizione di Newton, siccome inesattissima, sciogliere in conto alcuno la difficoltà insorta sul significato della formola $c = {}^{s}/_{t}$ ossia sulla espressione che la *celerità è il rapporto del tempo allo spazio* questa difficoltà sussiste nel suo pieno vigore.

96. E fisici di sommo merito ben l'hanno infatti sentita, ma non sono stati in conto alcuno felici nell'eliminarla. Libes, Hauy, Scinà, Lamè e molti e molti altri di distintissimo merito per riuscire nell'intento si sono creduti in facoltà di spogliare (mi servo delle stesse loro parole) *di spogliare i numeri della loro eterogeneità*, *riducendoli*, come essi dicono, *a numeri astratti* (e noi in vece diremmo a numeri indicanti ripetizione) col considerarli come numeri indicanti il *quante volte* essi contengono la rispet-

tivà unità. Provando anch' essi difficoltà a concepire come la velocità concreta sia data dal quante volte il tempo è contenuto nello spazio, si dettero a dichiarare che $c = {}^s/_t$ presa letteralmente, non ha significato, e che perciò conviene ridurre ad astratti i numeri c, s, t, e spogliarli così della loro eterogeneità, sicchè la formola insignificante per sè medesima, divenga l' espressione elittica di ${}^c/_1 = {}^s/_1 : {}^t/_1$. E poichè l' ottenuto quoto ${}^c/_1$, ossia il quante volte la celerità stabilita per unità è contenuta nella celerità c del mobile, è uguale al numero concreto c indicante la celerità stessa; così se questa fosse incognita, viene tosto determinata da ${}^c/_1$ ossia dal numero indicante il quante volte l' 1 sta in c. Con questo gretto artificio, cui hanno fatto ricorso fisici d' altronde valentissimi, diametralmente opposto al precetto di Cartesio « *Il calcolatore non debbe mai separare la cosa contata dal suo soggetto* » si lascia il concreto finchè fa comodo per non incontrare difficoltà ed obbiezioni; e i risultamenti ottenuti in astratto tornano poscia ad applicarsi al concreto. Ma perchè questo metodo di dimostrazione ha a partigiani i citati fisici di chiarissimo nome, credete forse che io sia titubante a dirvi decisamente che è erroneo del tutto? No al certo: poichè il dimostrarvelo è ben facile cosa. La formola ${}^c/_1 = {}^s/_1 : {}^t/_1$ tradotta in parole ci esprime, che se noi prendiamo due numeri astratti, l' uno eguale al quante volte l' unità dello spazio è contenuta nello spazio descritto dal mobile, e l' altro eguale al quante volte l' unità di tempo è contenuta nel tempo dal mobile impiegato, il quante volte il primo numero contiene il secondo, ed è ciò che costituisce il 2.° membro della esposta equazione, è uguale al quante volte la celerità stabilita per unità è contenuta nella celerità del mobile, il qual quante volte costituisce il 1.° membro della esposta equazione.

97. Questo e non altri è il concetto dell' eguaglianza che

la formola sopra espressa ci esprime (1). Ed è innegabile che questa uguaglianza è vera: ma non lo è per altro titolo se non perchè la quantità concreta c è realmente come vedremo tante volte più piccola della quantità concreta s per quanto lo indica t. Se niuna nota corrispondenza vi fosse tra c, s, t da potere ammettere che $c = {}^{s}/_{t}$, come alcuna non havvene al certo, quando non uno solo di questi elementi, ma tutti gli abbiamo spogliati della loro eterogeneità, chi nei campi dell' astratto trovare allora potrebbe per qual ragione ${}^{c}/_{1} = {}^{s}/_{1} : {}^{t}/_{1}$? Niuno certamente. Que' fisici dunque, i quali credono che la equazione $c = {}^{s}/_{t}$ sia insignificante allorquando per c e per s s' intendano i numeri realmente concreti indicanti la celerità, e lo spazio percorso, mancano di ogni appoggio per dimostrare la verità dell' altra ${}^{c}/_{1} = {}^{s}/_{1} : {}^{t}/_{1}$; e se questa formola non è dimostrata, come poter da questa dedurre che per essere $c = {}^{c}/_{1}$ ne segue che c possa essere espressa da ${}^{s}/_{1} : {}^{t}/_{1} = {}^{s}/_{t}$? Havvi qui dunque una solenne petizione di principio, poichè si fa derivare una prima proposizione da un' altra, la quale non può d' altronde ammettersi per vera se non è vera la prima. E questa seconda proposizione ${}^{c}/_{1} = {}^{s}/_{1} : {}^{t}/_{1}$ è poi una cognizione inutilissima, e ciò che più monta è cognizione tale cui la mente nostra non pensa affatto allorchè fa quel ragionamento che le è necessario per convincersi del concetto che viene espresso dalla formola prima $c = {}^{s}/_{t}$; formola che non è, come fra poco vedremo, insignificante, ma esprime (e senza che siavi d' uopo di abbandonare affatto la idea concreta di tese, di metri, ec. che nei casi particolari costituiscono lo spazio s) esprime un concetto semplicissimo, facilissimo a intendersi e tutto

(1) E qui io chiederei di grazia chi dei due cade in maggiori sofisticherie e inasattezze, chi cerca spogliare i trattati elementari di questa sorta di proposizioni o chi ve la ha introdotte?

diverso dalla intralciata, scabrosa ed al tempo stesso insipida ed inutile proposizione in che si converte la sopra esposta seconda formola tradotta in parole. Tanto è falsa che la prima sia una elittica, un' abbreviata espressione di questa, siccome i citati fisici ammettono.

98. Altri valenti Scrittori poi, come Dandolo, Giorgi nelle note a Despretz, Biot, Barlocci, ec. avvisandosi anch' essi di non potere ammettere che la celerità d' un corpo che si muove con moto uniforme, risulti dal quante volte il tempo è contenuto nello spazio, hanno fatto ricorso a quest' altro espediente. Facendo essi avvertenza che il quoto d' una divisione, o il valore d' una frazione è tanto maggiore, quanto maggiore ne è il dividendo o il numeratore, e minore il divisore o denominatore; e che in pari modo tanto maggiore è la celerità, quanto maggiore lo spazio percorso e minore il tempo impiegato a percorrerlo e profittando di questa analogia, così hanno essi opinato. Noi col porre la celerità nel posto del quoto o valore della ragione, e lo spazio nel posto del dividendo o numeratore, ed il tempo nel posto del divisore o denominatore, scrivendo $c = {}^{s}/_{t}$ intendiamo di significare non già che la celerità sia lo spazio diviso pel tempo, ma unicamente che la celerità è tanto maggiore, quanto è più grande lo spazio, e più piccolo il tempo in cui è stato percorso, verità intelligibilissima a tutti. In questa opinione dunque la maggioranza che abbiamo ora nominato importa per necessità un paragone fra due velocità da una parte e gli spazi combinati ai tempi corrispondenti dall' altra, e si viene perciò a formare un giudizio, la cui espressione in matematico linguaggio è la seguente « *le celerità stanno fra loro nella diretta degli spazi e nella inversa dei tempi* » e quindi si sostiene che la formola $c = {}^{s}/_{t}$ non è che la espressione elittica di questa proporzione

$$c : C = \frac{s}{t} : \frac{S}{T}$$

Di questa opinione sono stato pur io per molti anni ma spesso tornandovi sopra col pensiero (perchè non ne era a dir vero pienamente soddisfatto) mi accorsi finalmente, che quanto è vera la proposizione che le celerità stanno fra loro nella diretta degli spazi e nella inversa dei tempi, altrettanto è falso che l' equazione $c = {}^{s}/_{t}$ altro non faccia che esprimere elitticamente questa proporzione. Ne volete una prova convincentissima? Riflettete che il principal uso delle proporzioni è per trovare uno dei quattro termini di che esse risultano, il quale sia incognito: supponete che questo termine nel nostro caso sia la celerità c: ammettete il caso il più semplice che cioè c, s, t sieno eguali ad 1, che cioè c esprima l' unità di misura della celerità, cioè l' attitudine del mobile a percorrere l' unità di spazio s in una unità di tempo t, e sieno quantità note S e T corrispondenti alla incognita celerità C. E' ben chiaro che fatta la sostituzione di 1 alle quantità c, s, t nella superiore proporzione, essa diventa

$$(A) \dots\ 1 : C = \frac{1}{1} : \frac{S}{T} \text{ donde } (B) \dots\ C = \frac{S}{T}$$

Or se l' equazione (B) deriva dalla proporzione (A), non può con la proporzione confondersi. Quindi se nel nostro esempio la (B) è una equazione il cui 2.º membro esprime il valore del termine C che era ignoto, non può confondersi con (A) che invece di esprimere l' eguaglianza di due termini, esprime l' ugualglianza di due rapporti. Non può dunque sostenersi affatto che (B) sia una espressione elittica della proporzione (A) dalla quale deriva, senza cadere in questo majuscolo assurdo in Logica, di riguardare cioè una proposizione che è dedotta, come rigorosamente identica a quella da cui si deduce, e riflettendo che di simili logiche assurdità non è nè molto bello, nè molto onorevole espediente che i Maestri dieno mostruoso esempio ai discepoli, io tosto l' abbandonai appena trovai il modo di liberarmene. La formola dunque

$c = {}^s/_t$ torna di nuovo in campo non come espressione elittica d' una proporzione, ma come una vera equazione: quindi l' artificio cui aveau fatto ricorso vari Fisici di cui ora parlavamo, cade a terra, e la difficoltà di concepire come possa la velocità essere espressa dal quante volte il tempo è contenuto nello spazio, torna nel suo pieno vigore.

99. Abbandoniamo dunque i Fisici i quali sebbene siensi appigliati a diversi ripieghi, niuno ne hanno trovato che sia atto a sciogliere il nodo della quistione, e rivolgiamoci un poco agli Ideologi, per osservare se sia ad essi bastato l' animo di mostrar le cose in quel vero aspetto che loro conviene. E poichè tra questi quegli che mi sembra trattar la quistione, sebbene incidentemente, in un modo diverso da quello praticato dai Fisici, è il celebre Galluppi, facciamoci ad esaminare le sue riflessioni. Meditando egli sulle idee dello spazio e del tempo, si accorse della difficoltà superiormente affacciata, e vedendo impossibile (mi servo delle stesse sue parole) (*a*) « *che si possano dividere una per l' altra due quantità concrete di specie differenti, ed aversi per quoto una quantità d' una terza specie* » piuttosto che spogliare i numeri della loro concreta natura, siccome i fisici hanno fatto, passò egli in vece a mostrare che la misura del tempo è lo spazio; e quindi da questo solo rimarco credette Egli di poter dedurre quanto occorre per isciogliere ogni difficoltà, ma cadde in inganno. Galluppi assai meglio di di tutti i fisici, le cui opinioni abbiamo esaminato, aveva ben conosciuto donde dovevano muovere le sue investigazioni per ben farsi addentro al significato della formola in quistione: ma disgraziatamente arrenossi a mezza via, e preoccupato dall' idea che il rappresentante del tempo è lo spazio, cadde in un errore sì

(*a*) Galluppi — Elementi di Filosofia pag. 346 Tomo I. Edizione Anconitana.

di descritto dal sole, è contenuta trenta volte in quest' arco, e che sessanta volte sia contenuta la strada percorsa dal mobile *A* nell' arco di un solo grado che dal sole simultaneamente ad *A* è stato percorso? E concesso ancora questo impossibile, concesso che siasi potuto trovare essere la strada percorsa da *B* $^1/_{30}$ di gradi due, ed essere $^1/_{60}$ di uno dei gradi descritti dal sole il sentiere descritto da *A*, questi due risultati che cosa ci esprimono? Se *A* ha percorso $^1/_{60}$ di gradi uno (seguo l' andamento stesso che al calcolo dà Galluppi) viene ad aver percorso $^2/_{120}$ ossia $^1/_{120}$ di gradi due, mentre *B* ha percorso $^1/_{30}$ ossia $^4/_{120}$ di gradi due. Questi due risultati $^2/_{120}$ e $^4/_{120}$ di gradi due, altro non ci esprimono che la misura degli spazi percorsi da *A* e da *B* a tenore della *data e non concessa* impossibilità di servirci per unità misuratrice del grado stesso misuratore degli spazi percorsi dal sole. Fin qui dunque non abbiamo che spazi misurati: e solo è d' uopo avvertire che per misurarli Galluppi ha scelto lo spazio stesso che serve a misurare il tempo, mentre potevamo servirci d' altra qualunque grandezza ci avesse piaciuto.

Trovata così la grandezza degli spazi percorsi dai due mobili, come da essa passiamo ora a determinare le rispettive celerità? Io noto che lo spazio descritto da *A* in una sola unità di tempo, ossia la sua celerità, è lo stesso spazio $^1/_{120}$ che esso ha descritto, perchè lo ha appunto dedescritto in una sola unità di tempo, simultaneamente cioè all' arco di un grado descritto dal sole: noto del pari che lo spazio descritto da *B* in una sola unità di tempo, cioè la sua celerità, è lo spazio totale $^4/_{120}$ descritto da *B* diviso per due, ossia reso tante volte più piccolo quante sono le unità di tempo impiegate a percorrerlo, le quali appunto sono due, perchè il movimento di *B* fù simultaneo a quello di due archi di un grado percorsi dal sole, è dunque $^2/_{120}$. E poichè $^1/_{120}$ è la celerità di *A* e $^2/_{120}$

è la celerità di B, rileva ognuno che questa è doppia di quella.

103. Ecco l'andamento che tiene la nostra mente per giungere a conoscere le celerità dei due legni: e questo è pur quello che ha tenuto Galluppi. La differenza che passa tra il suo ragionamento ed il nostro, stà in ciò, che egli, mentre preoccupato della erronea sua idea che gli spazi percorsi dai legni sieno omogenei agli archi percorsi dal sole, crede essenziale alla deduzione ultima che B è del doppio più veloce di A, il prendere per misura degli spazi percorsi dai legni l'arco di un grado percorso dal sole; noi all'opposto stimiamo indifferente il prendere per unità di misura qualunque lunghezza ne piaccia, e dichiariamo anzi del tutto ineseguibile il prendere, come Galluppi vorrebbe, per unità di misura l'arco d'un grado descritto con un raggio di oltre 34 milioni di leghe, qual'è la distanza della nostra terra dal sole. In tutto il resto, per giungere ai risultati ottenuti, egli pure passa per la trafila dei sopra esposti ragionamenti, ottiene cioè le velocità, osservando non già quante volte lo spazio esprimente il tempo è contenuto nello spazio descritto dal mobile, ma rendendo questo spazio le tante volte più piccolo, quante sono le unità dello spazio esprimenti i tempi trascorsi.

104. E poichè principale scopo delle nostre lettere è il premunirci di mezzi atti ad evitare le cause degli errori, nè questi mezzi possiamo procurarci, se le dette cause ignoriamo, così è bene che frugando andiamo il motivo che ha recato quel sommo ingegno del Galluppi a cadere in un errore così madornale; nè è difficile il ritrovarlo. Il suo sbaglio è una prova dell'influenza che può talvolta sopra di noi l'impegno di mostrare un assunto sia pure verissimo. Il desiderio di trovare più che possiamo argomenti in suo favore è un affetto pur esso che offusca talvolta le intellettive nostre potenze. Questo desiderio ci fa riguardare

per tante prove anche que' fatti che ne hanno l' apparenza, ma che bene esaminati non provano nulla. Quando le nostre vedute hanno qualche originalità che lusinga il nostro amor proprio, se qualche cosa abbiamo, che al primo apparirci alla mente ci sembra favorirle, noi ci contentiamo di questa prima impressione, sfuggiamo anzi come cattivo il buon pensiero di assoggettarla a severa disamina, per tema di rimanere convinti, che que' fatti e quelle osservazioni che in apparenza sono favorevoli non fanno in sostanza al nostro proposito. Oh! quante, caro Amico, oh quante sono le strade per le quali cerca l' errore d' insinuarsi nell' animo nostro! Noi giungiamo talvolta a provar dispiacenza che ci abbandoni un inganno!!! Galluppi cominciò bene le sue indagini, facendosi ad esaminare la natura dei termini della divisione nella formola $c = s/t$: ma non sì tosto si avvide che all' inconveniente inammissibile nei problemi di divisione, che tutte e tre le quantità sieno eterogenee, come a primo aspetto appariscono nella formola, si sarebbe trovato rimedio col riguardare il tempo come espresso dallo spazio, che tosto egli limitossi a questo rimarco e non proseguì più oltre le sue indagini giacchè tanto gli bastava per favorire, la sua dottrina che pone l' oggettività del tempo nella causalità. Egli così dovette ragionare fra sè stesso. Si brama un fatto, che tenda anch' esso a dimostrare la giustezza delle mie vedute intorno alla natura del tempo che io credo dovere essere necessariamente rappresentato dallo spazio, eccolo nella formola $c = s/t$. Il concetto di essa è impossibile finchè tutti e tre i suoi termini sono eterogenei: meco si convenga che il tempo t sia rappresentato dallo spazio, ed ecco che ogni assurdità si dilegua. E il desiderio che il riguardare t come omogeneo ad s servisse di appoggio alle sue idee, la mente distolse di quel celebre pensatore dal proseguire con acuto scrutinio la bene intrapresa sua analisi, della quale dobbiam

perciò dire « *infelix operis summa, quia ponere totum nescit* ». Fate, egli così precipitò i suoi giudizi: fate che nella formola $c = {}^s/_t$ sia il tempo rappresentato dallo spazio: ecco che dividendo e divisore sono spazi entrambi, e perciò omogenei, ed ecco che non v' ha più nulla d' inconcepibile, poichè non è più inconcepibile che si abbia per quoto la celerità, essendo il quoto sempre una quantità eterogenea quando sono omogenei il dividendo e il divisore.

105. Ma egli non doveva trattenersi nel solo esame del tempo: doveva spingere le sue ricerche sulla natura pur anche della celerità; ed avrebbe osservato essere anch' essa una quantità rappresentata dallo spazio, e quindi essere tre spazi i tre termini della divisione presentati da $c = {}^s/_t$, e quindi anzichè offrire l' aspetto di tre termini eterogenei, la formola parrebbe in vece offrire l' aspetto di omogeneità nei termini tutti: ma poichè questa pure è inammissibile nei problemi di divisione; doveva rimarcare egli che lo spazio misuratore del tempo espresso da t è una cosa decisamente eterogenea allo spazio s descritto dal mobile, e che perciò essendo necessariamente eterogenei dividendo e divisore, la velocità espressa dal quoto esser doveva necessariamente omogenea al dividendo e non eterogenea, come Galluppi suppose. Sebbene dunque si ammetta che il tempo sia rappresentato dallo spazio, non è per nulla vero che questa massima trovi un appoggio nel concetto di $v = {}^s/_t$ quasi che questo non potesse sussistere senza ammettere t omogeneo ad s giacchè anzi debbe essergli eterogeneo. In questa disamina dunque Galluppi non ha fatto uso al certo di quello spirito investigatore che tanto risplende nella maggior parte delle sue opere (*a*).

(*a*) Duolmi che dopo di essermi mostrato di un sentimento diverso da quello di Galluppi sull' oggettività delle sensazioni in una mia memoria stampata nel 1836, le circostanze mi portino anche ora a rimarcare nelle

106. Ora se nè Galluppi col far ricorso alle metafisiche nozioni del tempo, nè i matematici e coll' addurre a sostegno la definizione del numero data da Newton e con lo spogliare i numeri della loro eterogeneità, e col dare all' equazione $c = {}^{s}/_{t}$ il significato d' una proporzione, sono riusciti a togliere l' assurdità dell' espressione « *la celerità è il rapporto del tempo allo spazio* » e come mai potrà chiedersi ha avuto origine quest' assurdo? Dove è nascosto l' errore che al medesimo ci conduce?

Sì: avete ragione. E' ben ora che io, caro amico, appaghi questa giusta vostra curiosità, che la disamina delle erronee opinioni in proposito l' avrà vieppiù eccitata e resa sempre più viva.

A secondare le vostre brame io mi fo a passare in rivista le prime proposizioni, che intorno alla celerità vedemmo fin dal principio di questa lettera avere i fisici esposto, Essi ci dicono « *la celerità risulta dal rapporto dello spazio al tempo* ». E questa preposizione io trovo verissima, quando si dia alla parola rapporto un significato il più esteso, quando si prenda cioè per l' indicazione d' una dipendenza qualsiasi e nel nostro caso precisamente per la indicazione di una necessità di coesistenza di queste due

sue opere un' altro difetto, e bramo che non si arguisca da ciò, esser poca la mia stima verso questo Autore, che anzi io tengo in moltissimo pregio, perchè chiaro e preciso nella maggior parte delle sue idee che trovo spoglie del romanticismo metafisico, e perchè seguace il veggo di un metodo che avvezza la mente alla filosofica investigazione. Io in somma lo ritengo per un pensatore tanto più profondo quanto meno il trovo transcendentalista; e coloro che lo tacciano di leggero perchè non sogna e non somiglia a quell' inesperto scrittore che ci nomina Orazio *qui variare cupit rem prodigialiter unam*, sono da me pregati a leggere con quella ponderazione che l' argomento richiede, quella piuttosto rara tra le sue opere che porta per titolo *Considerazioni filosofiche sull' idealismo trascendentale e sul razionalismo assoluto*.

idee che sono due elementi indispensabili della idea composta della celerità. Ma quando essi soggiungono « *ma il rapporto del tempo allo spazio è il quoto dello spazio diviso pel tempo* » essi esprimono una proposizione falsa, perchè quì danno alla voce rapporto non più il significato generico di prima, ma invece il significato particolare che vi danno i matematici i quali per convenzione sotto la sola voce rapporto intendono un rapporto per quoto; e allorchè le si accorda questo significato, è falsissimo che la celerità sia il rapporto del tempo allo spazio, ossia il quante volte il tempo è contenuto nello spazio, essendo questa espressione un patentissimo assurdo. Quindi falsa la conseguenza nel preciso modo con cui viene espressa, che cioè la celerità è il quoto dello spazio diviso pel tempo.

107. Ma se la celerità non può essere il rapporto del quante volte il tempo è contenuto nello spazio, mi vanno replicando taluni, e come avviene poi che dessa nei diversi casi particolari si ottiene, dividendo lo spazio pel tempo? Questa obbiezione non avrebbe certamente luogo, se della divisione aritmetica si dassero idee meno incomplete di quelle che comunemente si danno, se quelle parole di *tutto*, di *numero*, e di *grandezza di parti* che tanto vi facevano contorcere e sbadigliare in quella definizione della divisione che vi sembrava una orazione periodica, fossero state da voi benignamente accolte, anzichè con troppa alterigia disprezzate e derise; e se invece di riguardare per inconcludenti ed inutili certi criteri, vi foste abituati nella applicazione della divisione alla soluzione dei problemi, a ben distinguere quelli in cui cercasi la *grandezza* delle parti da quelli nei quali occorre cercarne il *numero*.

108. Io comincio dal farvi riflettere esservi delle quantità al cui concetto sono indispensabili due elementi eterogenei, niuno dei quali vale per sè solo a determinarle. Come nei comuni usi della vita di tal sorte sono il prezzo, il dazio,

il porto d' una merce, così in fisica lo sono la velocità di un mobile, la densità di un corpo. Ed in vero a costituire per esempio il prezzo di due qualità di grano non basta la cognizione che per la prima si spesero p. e. scudi 48, e scudi 45 per la seconda qualità: ovvero non basta il sapere in vece che si sono comprate sei rubbia della prima sorta, e cinque della seconda; ma è necessario conoscere il numero degli scudi sborsati ed insieme delle rubbia comprate. Con questi due elementi egli è facile dedurne il prezzo, cioè il numero degli scudi equivalenti alla stabilita unità di misura, che nel nostro esempio è il rubbio. In simil modo per conoscere la velocità di due corpi, ciascuno dei quali abbia un moto uniforme, non basta il sapere che il primo abbia percorso metri sessanta p. e., e metri 120 il secondo, ovvero il sapere in vece unicamente che il primo è stato in moto per 4 e il secondo per 24 minuti secondi, ma fa d' uopo conoscere lo spazio percorso ed insieme il tempo impiegato a percorrerlo, e dalla cognizione di entrambe facil cosa sarà il dedurre il maggiore o minore spazio, che nella stessa unità di tempo hanno percorso con moto uniforme i due mobili, spazii che se non sono a confondersi con le stesse velocità dei mobili, sono però il loro rappresentante. La velocità in fatti, e così la forza, sono quantità determinabili nei loro gradi di aumento e diminuzione unicamente per gli spazi che in grazia di essi sono percorsi in una data unità di tempo qual' è p. e. un secondo.

Ora nel modo stesso che per conoscere il prezzo del grano ossia il valore di un rubbio, convien rendere sei volte più piccola la somma di scudi 48 valore di sei rubbia della prima qualità, ossia dividerla per 6, sicchè ne risulta la somma di scudi 8 pel prezzo richiesto e dividere scudi 45 valore di rubbia 5 per 5, sicchè ne risulta la somma di scudi 9 pel prezzo richiesto, in simil guisa, stabilito per

l' unità di tempo il minuto secondo , ed il metro per l' unità di spazio rappresentante la celerità , io per conoscere la celerità del mobile che ha percorsi metri 60 in 4 secondi , rendendo 4 volte più piccolo lo spazio di 60 metri , ossia dividendo 60 metri per 4 , ottengo per quoto metri 15 che mi esprime lo spazio percorso in un solo secondo , spazio che mi rappresenta la celerità del mobile , e così pure divido metri 120 per 24 ed ottengo di quoto 5 che mi esprime lo spazio percorso in un solo secondo dall' altro mobile , che percorreva metri 120 in secondi 24 , mi esprime cioè la sua celerità ; e confrontando questa celerità 5 con la celerità del primo che è 15, rilevo esserne $^1/_3$.

La *celerità* dunque , o per dirlo esattamente , *lo spazio percorso dal mobile in una data unità di tempo dal quale viene rappresentata* , *è uguale al totale spazio percorso dal mobile con moto uniforme* , *reso tante volte più piccolo* , *quante sono le unità di tempo impiegate a percorrerlo* . Ecco il significato della formola $c = {}^s/_t$.

109. Questo brevissimo semplicissimo e facilissimo ragionamento , e fuor d' esso null' altro o Signori (e ve lo asserisco con tutta la fermezza , che che dai Fisici e' Metafisici siasi detto di stravagante ed astruso in proposito) è quello che fa la nostra mente per ottenere e valutare la celerità d' un mobile nel moto uniforme . E questo ragionamento è similissimo a quello ovvio e comune che si fa per determinare il prezzo d' una merce e che io a bella posta ho voluto , per farvene rimarcare l' analogia , far precedere a quello col quale abbiamo trovata la celerità . Ed è assurdo il dire che la celerità è il rapporto del tempo allo spazio , ossia è lo spazio diviso pel tempo , precisamente allo stessissimo modo che sarebbe assurdo il dire , che il prezzo del grano è il rapporto del suo volume alla moneta , ossia è la moneta divisa pel volume del grano . E' dunque vero che la celerità c è il risultato d' una divisione espressa dalla

formola $c = {}^{s}/_{t}$, ed è nel tempo stesso assurdo che sia il rapporto del tempo allo spazio — Ma questo è appunto ciò che noi non sappiamo conciliare, mi soggiungono taluni — E per qual ragione io ripeto, e perchè averne dei dubbi, perchè farne le meraviglie? Queste non possono nascere che nella mente soltanto di quelli i quali non sanno ravvisare nella divisione che una operazione per la quale si osserva il rapporto d' un numero all' altro, ossia quante volte un numero è contenuto nell' altro: ed eccovi una prova evidente dei danni che arrecano le incomplete definizioni. Fate che il più gretto e semplice studente di Aritmetica, provveduto delle sole nozioni (purchè però esatte) della divisione, sia un poco esercitato nell' applicare ai problemi i criteri stabiliti per conoscere se vadano essi sciolti o colla moltiplica che cerca il *tutto*, o con la divisione allorchè si cerca per mezzo di essa la *grandezza*, o con la divisione allorchè si cerca il *numero* delle parti, e vedrete che esso non trova la menòma difficoltà, il menomo intoppo.

110. Egli rimarca che il quoto non solo può esprimere il *quante volte* un numero è contenuto nell' altro, ossia il numero delle parti, ma può anche esprimere la *grandezza delle parti*, ossia una parte tante volte più piccola del dividendo per quanto lo indica il divisore, e questo è appunto il caso nostro. La formola $c = {}^{s}/_{t}$ che possiamo dire essere stata fin quì un enigma, alla retta interpretazione del quale e i Cultori della Filosofia naturale e gli Ideologi si sono tanto e senza frutto occupati, diventa l' espressione di un concetto sì facile, che sembra impossibile abbia dato tanto a pensare e a Fisici ed a Metafisici.

Il semplice studente di aritmetica, appena gli si presenta la formola $c = {}^{s}/_{t}$, s' accorge che le quantità espresse in una divisione non possono tutte e tre essere eterogenee (§. 81): riflette esservi delle quantità le quali affinchè sieno misurabili, siccome si esige per essere oggetto di

calcolo, conviene che sièno rappresentate per l' estensione, e tali sono appunto la celerità ed il tempo (§. 36) : e quindi conchiude che non solo *s*, ma anche *c*, *t* sono spazi. Non per questo deduce però che sieno tutte cose omogenee, poichè questo caso non può darsi nei problemi di divisione (§. 81) ; e ricorrendo alla data nozione della celerità (§. 91) si avvede che dessa *c*, siccome rappresentata dallo spazio descritto nella unità di tempo, è una parte di quello spazio *s* che viene descritto in un dato numero di unità di tempo : che perciò il quoto *c* è omogeneo al dividendo *s*, e quindi che in questa divisione la cosa cercata è la grandezza delle parti (§. 81 III.) e il divisore ne esprime il numero.

Quando dunque il semplice studente di aritmetica sente que' Fisici che dicono, che la celerità è il rapporto del tempo allo spazio : Signori sbagliate, egli tosto dice loro : voi siete fuori di strada : credete che in questo caso il quoto *c* esprima un rapporto, il *quante volte* cioè il divisore è contenuto nel dividendo, ossia il *numero delle parti* ; ed in vece, per poco che riflettiate ai criteri della divisione, vi accorgerete che nel nostro caso il quoto *c* esprime la *grandezza delle parti*.

Quando ascolta quegli altri i quali dicono, tutti i numeri non sono che rapporti, e può perciò ben dirsi (§. 93) che la celerità è il quante volte il tempo contiene lo spazio, esso gli avverte che la idea della celerità non consiste in un *quante volte*, ma consiste nella idea di un numero concreto indicante un determinato spazio percorso in una unità di tempo.

Quando que' Trattatisti consulta, i quali per sciogliere la difficoltà ci dicono, che cònviene spogliare i numeri della loro eterogeneità col considerarli in astratto (§. 96) dite il falso o Signori, esso replica, poichè lo spazio *s* rimane sempre spazio, e non ha bisogno dirò meglio, non

dee divenire il semplice quante volte l' unità vi è contenuta. Non vi è cioè bisogno e non si deve ricorrere alla puerilità di denudare lo spazio della sua concreta natura, durante l' operazione del calcolo, per poi farlo ricomparire di nuovo vestito delle sue forme concrete, allorchè l' operazione ha avuto il suo termine; ed il tempo t, che p. e. esprime un dato numero di secondi, è quella sola quantità eterogenea del problema, la quale non fa che additarci quante volte la cercata grandezza delle parti (cioè lo spazio descritto in un secondo) debba essere contenuta nel dividendo cioè nello spazio che in un dato numero di secondi è descritto, ed ecco perciò che non tutti i termini, se vogliamo render conto a noi stessi di ciò che facciamo, prosegue l' allievo, ma il solo divisore t conviene che si spogli della sua eterogoneità, ossia ecco il termine del problema eterogeneo al dividendo ed al quoto, che per l' indole del problema stesso serve a determinarci il divisore, ossia il quante volte la cercata grandezza debbe nel tutto essere contenuta.

Quando apprende che altri Scrittori cercano di evitar la difficoltà dicendo che la formola $c = s/t$ è la espressione elittica d' una proporzione (§. 98) l' allievo si porta a riflettere che la formola è una reale equazione, e che perciò così tergiversano e non dimostrano.

Quando tien dietro alle analisi degli Ideologi, e si accorge che Galluppi p es. crede eliminata la difficoltà per aver soltanto fatto avvertire che il tempo è misurato dallo spazio, e che perciò la formola non presenta più tre quantità eterogenee, giacchè s e t essendo entrambi spazi, la formola rientra nel caso di quelle divisioni che hanno omogenei il dividendo e il divisore, ed eterogeneo il quoto; no, sbagliate, senza perdersi di animo, l' allievo soggiunge: profittate dei criteri che servono per distinguere que' problemi in cui cercasi il *numero* da quelli in cui cercasi

la *grandezza delle parti*, e vi avvedrete che cercando la celerità, ossia lo spazio percorso in un secondo, dato lo spazio percorso in più secondi, voi cercate la cosa corrispondente all'unità, che è sempre il moltiplicando (§. 80 II.) il quale poi non può a meno di essere sempre omogeneo al tutto dividendo (§. 81 II.): quindi il divisore t sebbene esprima lo spazio, è eterogeneo allo spazio dividendo perchè il divisore t esprime lo spazio che serve a misurare il tempo, mentre s esprime lo spazio che descrive il mobile.

111. Finalmente l'Allievo conchiude, io vorrei sapere perchè vi lambicchiate tanto il cervello per creare difficoltà dove non havvene alcuna. Io non già vi prego a dirmi quello che trovate d'inconcepibile: io vi sfido a sapermi trovare la cosa che a colpo d'occhio non vi si appalesi evidentissima nella formola $c = {}^{s}/_{t}$, quando vi ho detto che la celerità ossia lo spazio percorso dal mobile in una sola unità di tempo da cui essa è rappresentata, si ottiene, rendendo lo spazio totale percorso tante volte più piccolo, per quante sono le unità del tempo in che è stato in movimento, precisamente al modo medesimo che si ottiene il prezzo di un rubbio di grano, dividendo il valore del grano acquistato pel numero delle rubbia che si sono comprate. Ed ecco come, non io, ma un semplice Allievo col solo corredo delle esatte nozioni della divisione aritmetica, corregge i Fisici e gli Ideologi.

Dalla formola poi $c = {}^{s}/_{t}$ risultano $s = ct$, $t = {}^{s}/_{c}$, cioè lo *spazio è uguale alla celerità moltiplicata pel tempo*, *il tempo è uguale allo spazio diviso per la celerità*, espressioni che si spogliano dell'enigmatica apparenza loro non coll'erroneo espediente di spogliare i numeri della loro eterogeneità, ma col semplicemente assoggettarli a que' criteri che si sono stabiliti per riconoscere la diversa indole dei problemi. Ciò facendo, ognun vede che $s = ct$ significa che *lo spazio totale* s *percorso dal mobile con*

moto uniforme è uguale allo spazio c *percorso* in una sola unità di tempo, e tante volte ripetuto per quante sono le unità trascorse durante il suo *moto*: ognun vede che $t = s/c$ significa che *le unità di tempo impiegate dal mobile per percorrere con moto uniforme lo spazio totale* s, *sono eguali al quante volte lo spazio* c *percorso in una unità di tempo è contenuto nello spazio totale*. E queste verità intende anche un fanciullo con quella facilità stessa con cui intende che il valore di tutto il grano comprato è il prezzo d' un rubbio tante volte ripetuto per quante sono le rubbia acquistate, e che il numero delle rubbia di grano acquistate è determinato dal quante volte il prezzo di un rubbio è contenuto nel valor totale del grano di cui si è fatto l' acquisto.

112. Simili osservazioni vanno fatte intorno alla *densità*, che è la proprietà che hanno i diversi corpi di avere le loro mollecole più o meno vicine, di aver cioè una maggiore o minor massa sotto una stessa unità di volume. Stabilito in fatti che la massa sia rappresentata dal suo peso che è sempre alla massa proporzionale, e stabilito che denso come 1 si chiami quel corpo il quale abbia sotto il volume di un litro il peso di un chilogrammo, e tale è l' acqua, ossia stabilita per unità di misura delle densità dei corpi la massa di un chilogrammo sotto il volume di un litro, è chiaro che se un corpo ci presentasse il peso di chilogrammi 63 sotto un volume di 3 litri, rendendo tre volte più piccolo per mezzo della divisione per 3 questo peso 63, otteniamo 21, peso del corpo sotto il volume di un litro solo, ossia sotto l' unità di volume, e quindi diciamo che questo $^{63}/_{3} = 21$ esprime la sua densità, la quale è 21 volte maggiore di quella dell' acqua che sotto lo stesso volume pesa 1. E chiamata in genere d la densità di un corpo, m la massa, u il volume, abbiamo $d = m/u$ ossia *la densità uguale alla massa divisa per volume*.

sotto le quali parole, non dobbiamo intender già il *rapporto della massa al volume*, espressione che sebbene sia in bocca di tutti i Fisici, è del tutto assurda, ma intender dobbiamo *la massa resa tante volte più piccola per quante sono le unità di volume* alle quali appartiene, sicchè appunto si abbia la massa che compete ad una sola unità di volume, che appunto è la quantità per la quale viene rappresentata la densità.

113. Dall' esposto risultare mi sembra non potersi revocare in dubbio che le idee chiare ed esatte intorno alla divisione aritmetica ci portano alle idee chiare ed esatte intorno alle idee della celerità e densità dei corpi, e tolgono quel conflitto in cui si trova la mente, la quale mentre è obbligata da una parte ad ammettere le formole $c = {}^{s}/_{t}$, $d = {}^{m}/_{u}$ perchè ci recano ad esatti risultati, è impossibilitata dall' altra a penetrarne il concetto, finchè essa se ne stà nell' errore di credere che la celerità sia il rapporto del tempo allo spazio e la densità il rapporto del volume alla massa.

Abbiamo veduto però tale e tanta essere la facilità delle deduzioni per le quali viene ogni oscurità dileguata, che ci sembra impossibile esservi eccellenti Fisici ed acuti Ideologi, che si sieno posti con la lanterna in mano a cercar ninnoli d' inutile trattenimento, ad accattare per ogni dove dei sassi affine di spargerli e rendere aspra così quella via che avevamo la più appianata del mondo, e a scavarsi appositamente un labirinto nelle viscere della terra per trovar tenebre nel pieno meriggio. E sono vere tenebre quel creduto bisogno di sostituire in tutti termini dell' operazione l' astratto al concreto e spogliarli della loro eterogeneità.

E qual lezione mortificante non è questa, o caro amico, per noi! Se Uomini di merito mille e mille volte maggiore del nostro per mancanza di esatte cognizioni intorno alle e-

lementari nozioni della divisione aritmetica, non si sono avveduti di un vero, che chiaro nel più facil modo apparisce anche ad un fanciullo, quando su quelle elementari nozioni sia stato esattamente istruito, chi sa in quanti errori sconosciuti non versiamo anche noi intorno a tante materie, sugli elementi primitivi delle quali esatte e giuste non sieno le nostre idee!! E per rapporto a quelle che ci è riuscito di rettificare, quanta cura porre non dobbiamo perchè nel miglior modo sieno agli Allievi communicate, sicchè non abbiano ad esser per essi motivo di false nozioni e di inesattezze! Dopo questi riflessi io credo che niuno vorrà condannarmi e credermi invaso da spirito di neomania per le modificazioni che mi sono creduto in debito di aggiungere nelle idee della moltiplicazione e della divisione. Chi ditemi, avea più ragione, io d'introdurle veggendone evidente l'utilità per l'intelligenza delle esposte formole, e d'altre che per brevità tralascio, ovvero altri a biasimarle per solo spirito di contraddire?

114. Sì, sì hai fatto benissimo, mi sento da taluni soggiungere; e giacchè ci avvediamo bene che lo gradisci, ti applaudiremo pur anche: ma perchè menare tanto strepito per alcune riflessioni che tu stesso confessi essere di lievissimo momento? Pieno zeppo di fumo, e quindi più leggero ancora di questi leggerissimi riflessi, sarebbe mai che fosse il tuo cervello pur anche? Tu ci rassembri uno di quegli scolaruzzi, di cui nel suo trattato di Logica parla il Genovesi, che per una inezia da nulla detta sotto altri termini, si credono gli unici Riformatori di trattati e inventori di nuove scoperte. Perdonaci i nostri dubbi: ma chi sa quanti altri autori hanno esposto con altre parole le stesse tue osservazioni. E quand'anche ciò non fosse, se la maggior parte degli Autori non ha intorno alle formole di cui si è tenuto discorso, fatti tutti que' rilievi di cui tu (mentre simuli non curanza) vai ben pomposo, non è già

per la ragione che essi non li conoscano : Poverino tu ci fai compassione, perchè propriamente ti vediamo la vittima e il bersaglio d'una tentazione ignominosa, quale si è quella di pensar male dei Sommi. Eglino che sanno meglio di te condurre l'insegnamento, e conoscono quali sono le cose che più ad essi si addice di trattare o non trattare nel testo, tacciono i sopra esposti rimarchi appositamente per brevità, poichè ben sanno essere ufficio dei Maestri, il dilucidare nelle orali lezioni loro tutte quelle minute idee che come tanti da te creduti giojelli ci hai tu esposte con una stucchevole prolissità. E avessi almeno fatto uso di un linguaggio scientifico : ma nemmeno di questo ci sei stato cortese, giacchè, senza pretendere di farti scuola, sappi che parlando di Fisica, non è cosa molto convenevole ed utile parlar di cose di commercio, qual'è la compra del grano come hai tu fatto al (§. III.) se non vuoi confondere i giovani con disparatissime osservazioni, e se non vuoi con triviali esempi, e a nulla più che ad una elementare aritmeticuzza adattati, avvilire la scienza.

Alle quali cose io mi fo a replicare, che se da altri pure sieno state fatte osservazioni e rimarchi uguali ai miei io l'ignoro : so bene che in tutti que' corsi di Fisica che io conosco, io gli ho inutilmente cercati. Se vi ho portato l'esempio del prezzo del grano, ciò appositamente ho fatto per dimostrarvi che l'intelligenza di queste verità fisiche non esige in chi debbe apprenderle maggior forza d'ingegno di quello si richiegga per intendere quei semplicissimi problemi di commercio. Così facendo ho voluto pure dimostrarvi che le scienze vanno spogliate d'ogni impostura, che non vanno create difficoltà ove non sono, ma appianate ove fossero, nè vanno spaventati gli Allievi con un mistico linguaggio che valga a spargere fama nel mondo, delle difficoltà somme che hanno in sè le dottrine, sicchè faccia parere essere noi che le insegniamo con quelle inesat-

tezze medesime che abbiamo ereditate, qualche cosa di sublime e di grande. Queste sono miserie dell' orgoglio umano da cui se del tutto non siamo liberi ancora, dobbiamo procurare di liberararci.

115. Ed in quanto poi al sapere se nelle orali spiegazioni si facciano o nò dai Maestri i debiti dettagli, questa è quistione di fatto in cui amo di non entrare. Vi dirò solo in proposito di ben rammentarmi di un mio condiscepolo, il quale all' udire le espressioni « *lo spazio diviso pel tempo è la velocità : dallo spazio diviso per la velocità risulta il tempo : lo spazio è prodotto dalla velocità moltiplicata pel tempo* » queste mi diceva sono verità le quali in sè racchiudono trasformazioni sì difficili a concepirsi in grazia di troppo eterogenei elementi, che per quanto io mi sforzi, non mi entrano in mente. Di trasformazioni stravagantissime e di Atcone in cervo, e di Dafne in alloro, ec. è piena in vero l' antica mitologia ; e se dei sognati cambiamenti non so comprendere le cause, parmi almeno vederli effettuare sotto i miei occhi stessi, quando le belle ipotiposi ne leggo nel più immaginoso dei latini poeti. Quindi se non mi pascono l' intelletto, mi appagano almeno la fantasia : ma le grette metamorfosi soprauominate, quel mutarsi dello spazio in velocità in grazia del tempo che lo divide, quel convertirsi dello spazio in tempo mercè la velocità che lo smembra in parti, quel prodursi dello spazio mercè la potente azione di due fattori ad esso eterogenei *tempo* e *velocità*, sono misteriose operazioni, che mentre nemmeno valgono a recar diletto alla fantasia, trascendono le limitate forze del mio ingegno e me l' opprimono in tal guisa che nulla più. Quindi è che studi di simil fatta io tralascio : belli saranno, bellissimi, ma non fanno per me. Ed ecco come la mancanza di precisione nell' insegnamento è spesso causa che giovani di bella mente prendano avver-

sione e si ritirino dagli studi delle Matematiche, dalle quali avrebbero potuto trarre immensi vantaggi.

116. Ma questa mancanza di precisione nelle orali spiegazioni a tale condotta da far prendere avversione alla scienza, mi si risponde, saranno casi eccezionali e rarissimi! — Io o nol sò o non amo di saperlo; so però bene che la necessaria precisione mancherebbe certamente in tutti quelli che riconoscendo bastevoli all' insegnamento le comuni nozioni della divisione, condannano come inutili perditempi tutti que' dettagli che intorno alla divisione nelle antecedenti lettere ho esposto, poichè questi dettagli appunto sono indispensabili a togliere ogni oscurità dalle formole di cui si è fatta menzione. Vi dirò di più con tutta certezza che queste dilucidazioni non le ha date Libes al certo nelle orali sue spiegazioni, allorchè nel testo così si esprime « *Ma essendo lo spazio ed il tempo quantità eterogenee, per fare una tal divisione, bisogna spogliarle per così dire della loro eterogeneità, riducendole a numeri astratti che esprimono quante unità di loro specie essi racchiudono* (a) ». Non Hauy, il quale dopo aver detto che « *lo spazio totale percorso da un corpo e il tempo impiegato a percorrerlo, si esprime con numeri astratti* » così prosegue ad esporre le sue idee « *A tutto rigore non potrebbero dividersi l' una per l' altra due quantità eterogenee come lo spazio e il tempo: dunque questo linguaggio non è che una maniera compendiosa di esprimere che la velocità è uguale al numero di unità di spazio diviso pel numero di unità di tempo che misurano il moto di un corpo* (b). » Non Lamè, di cui ecco in proposito le sue parole « *l' espace, le temps et la vitesse, quantités d' espèces différentes, qui doivent etre*

(a) Trattato Elem. di Fisica tradotto da Baroni. Firenze 1803. p. 11.
(b) Trattato di Fisica tradotto da Eusebio Giorgi 1825 pag. 32.

rapportées a diverses unités pour qu on puisse comparer les nombres qui les représentent, t etant le rapport du temps employé á l' unité de temps ec. (a) « Non Pouillet che così ragiona « *Essendo in tempi uguali uguali gli spazi, ne segue esser costante il rapporto dello spazio al tempo: questo rapporto appunto dicesi velocità* (b). » Non Scinà il quale notando che *la densita è uguale alla massa divisa pel volume*, aggiunge « *E' solo d' avvertire che in questa espressione* $d = m/u$, *sì* m *che* u *non indicano la massa e il volume, ma il rapporto tra la massa e l' unità di massa, tra il volume e l' unità di volume, o sia due numeri astratti, che come tali si possono tra loro comparare. E però l' espressione* $d/1 = m/1 \times 1/u$ *si riduce per brevità alla* $d = m/u$ (c) » Non Montferrier, allorchè nel suo Dizionario delle Matematiche si esprime « *essere essenziale osservare che con queste parole* SPAZIO, TEMPO, VELOCITA' *bisogna sempre intendere i numeri astratti che indicano il rapporto di ciascuna di queste quantità con l' unità della sua specie* (d) ». Non molti e molti altri che per brevità tralascio, avendo nella moltitudine scelto precisamente que' pochi Autori o classici, o almeno di merito ben conosciuto, verso i quali somma è la mia stima e la mia predilezione. Dalle precise parole infatti che di essi io vi ho riportate apertamente apparisce essere eglino e nell' inganno di riguardare per astratti i numeri indicanti ripetizione, e in taluno di quegli errori che io credo di avere nella presente lettera pienamente confutati. E questi testi ho io voluto qui porvi sott' occhio ad

(a) Cours de Physique. Bruxelles 1837 Tom. I. pag. 17.

(b) Elementi di Fisica, e Meteorologia tradotto dal Palmieri. Napoli 1844, Tomo I. pag. 36.

(c) Elementi di Fisica generale. Milano 1838. Tomo I. pag. 60.

(d) Dizionario delle Scienze Matematiche. Prima versione italiana 1844 Tomo VI. pag. 583.

oggetto di additarvi col fatto come per difetto di giuste idee intorno alla moltiplica e alla divisione sia avvenuto che nell' esporre una verità la più semplice, qual' è $c = {}^s/_t$ si sieno create delle difficoltà e adombrata l' evidenza con delle inutilità le più vergognose. Sì: gli squarci che io vi ho sopra riportato sono tante inutilità vergognose introdotte non ad accrescere, ma, ad offuscare la più chiara e limpida luce. E non sarebbe ridicolissimo in vero il mio divisamento, se dopo di avere esposto che il prezzo d' una libbra di zucchero si ottiene rendendo cinque volte più piccolo (ossia dividendo per 5) i soldi 40 valore di libbre 5, a queste parole intelligibili anche ad un bambino, altre oscure ed inutili addizionassi coll' intenzione di renderne più palpabile l' evidenza? Se mi facessi a soggiungere: badate bene che nella soluzione che ora vi ho data del difficil problema, per formarci chiare e giuste idee delle cose egli è necessario che sotto le parole e *di soldi* 40 *impiegati per la compra*, *e delle libbre* 5 *di zucchero comprato*, *e del numero soldi* 8 *prezzo dello zucchero* dovete intendere i numeri che indicano il rapporto che a ciascuna di queste quantità ha l' unità della sua specie rispettiva, dovete intendere cioè che il numero 8 indicante il rapporto che ha l' unità soldo all' ottenuto 8 soldi prezzo di una libbra, è uguale al quante volte il numero indicante il rapporto che al numero delle 5 libbre ha la unità libbra, è contenuto nel numero indicante il rapporto che al numero 40 soldi prezzo delle libbre cinque ha la sua unità soldo. Se io così mi esprimessi, parlatemi sinceramente, *risum teneretis amici*, ponendo mente che questo guazzabuglio d' inutili parole fosse stato da me aggiunto colla intenzione di arrecare schiarimenti alla proposizione chiarissima che il prezzo d' una libbra si ha rendendo cinque volte più piccolo il prezzo di libbre 5? Ebbene, *mutato nomine de te fabula narratur*, potrei io dire a ciascuno

degli Autori che vi ho nominato, e limitandomi per brevità ai soli due ultimi, potrei soggiungere: sostituite i nomi di *velocità*, di *tempo* e di *spazio* a quelli di *prezzo*, di *libbre* e di *soldi*, e vedrete che i pretesi schiarimenti che io ho dato al problema dopo di averlo sciolto, ottenendo il prezzo di una libbra col dividere per 5 il prezzo di cinque libbre, schiarimenti che vi hanno giustamente eccitato alle risa, si convertono precisamente in quei medesimi che avete ora letti nei due ultimi squarci che vi ho riportati relativamente alla formola $c = {}^{s}/_{t}$. E di chi sono questi due squarci nei quali io ho notata tanta inesattezza ed inutilità di espressioni? Sono forse di Professori del mio calibro, o poco più sopra, sicchè vi possa venire il sospetto che a parlare contro di essi mi spinga uno spirito di rivalità? Nò certamente. Sapete chi sono? Io ve l'ho già notati. Uno di essi è Scinà', il cui solo classico discorso d'introduzione alla Fisica lo rese e lo renderà sempre carissimo a tutti coloro che si dedicano allo studio delle scienze naturali, l'altro è Montferrier sotto la cui direzione si è compilato il gran Dizionario delle Scienze esatte ed uno dei più distinti Matematici della Francia. Sì: questi due luminari ed altri egualmente celebri di cui vi ho fatto menzione, sono caduti nelle citate inesattezze per non aver avuto giuste idee sulla teorica della divisione, e sulle diverse condizioni che possono offrirci i problemi che vi appartengono, e per essersi lasciati imporre dall'apparente eterogeneità di tutti e tre i nominati termini *spazio*, *tempo*, *velocità*. Ed io vi ho le cose ad un punto condotte, da non potere esimervi dal convenirne. Sì: io ho voluto appositamente in fine di questa mia lettera portarvi al concreto sopra taluno dei rimarchi importanti che nel corpo di essa vi aveva già esposto, perchè vi facciano maggiore e più durevole impressione, ed ho voluto stringervi i panni al dosso sì fattamente, anzi ho voluto colle mie proprie mani af-

ferrare le vostre, appositamente per trascinarle sebbene ritrose, sopra gli oggetti in quistione, sicchè vediate non solo, ma tocchiate pur anche e palpiate questi importantissimi veri *che cioè della influenza dei cattivi metodi elementari si risentono ancora* i *grandi trattati delle scienze*, *e*, siccome al principio di questa mia io proposi di dimostrarvi, SPERIMENTANO I TRISTI EFFETTI DELLA INESATTEZZA DELLE PRIME NOZIONI ANCHE GLI UOMINI SOMMI. Ecco, o caro amico cosa risponderei ai miei oppositori: e voi che le teoriche della divisione studiato avete nei miei elementi di matematica, sempre più ora conoscerete che certi sviluppi non erano senza *perchè*, nè erano del tutto inutili e ridicole le mie novità. Voi le avete gustate, ne avete tratto profitto, e sempre più in seguito ne avete sperimentato l' utilità. Ma se foste stato educato ad altri princìpi, chi sa che non fosse venuta anche a voi la tentazione di contraddirmi. Malgrado però questi stimoli, la vostra prudenza, io sono certo, vi avrebbe trattenuto dal secondare all' istante il focoso prurito, ponendovi sott' occhio quest' utile verità, della quale, e voi ed io procureremo sempre di trarre profitto, cioè

« Quanto più una critica è subitaneamente emanata, e tanto più facilmente è seguita dal pentimento. »

LETTERA VII.ª

SULL' ACCORDO DELLE NOZIONI DATE INTORNO ALLA MOLTIPLICA E DIVISIONE CON LE TEORICHE DEL MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO.

ARGOMENTO

Si asserisce che la dimostrazione delle leggi del moto prodotto da una forza costante fatta per mezzo del piano triangolare delle velocità nelle scienze introdotto da Galileo, sia in opposizione con i criteri da me stabiliti intorno alla moltiplica e alla divisione (§. 117 e 118) — Ed io cominciando dall' affacciare contro questa sintetica costruzione la difficoltà che provano gli Allievi a concepire come la strada percorsa da un mobile possa essere rappresentata da una superficie, passo a far sentire la necessità di addimostrare loro che non è l' aia triangolare, ma la somma delle linee in essa condotte, che realmente rappresenti la strada o spazio percorso dal mobile; e dopo questo riflesso ogni opposizione ai miei criteri svanisce (§. 119 e 120) — Soggiungo poi che a questa dimostrazione sintetica ben sarebbe altra sostituire, che spiegasse direttamente e in pienissimo accordo con i citati criteri, siccome fa la qui esposta, le leggi del moto uniformemente accelerato (§. 122 al 141) — Taluni diranno che questa dimostrazione è prolissa e assai più lunga di quella che danno e Mazzoni e Montferrier e tanti altri celebri trattatisti di Fisico-Matematica. Ed io prima passo a sciogliere una difficoltà (§. 142 al 163) — Poscia sostengo che se la mia dimostrazione é più lunga, è ancora più esatta e più naturale (§. 164 al 167) — Altri diranno che eliminando affatto la dimostrazione di Galileo, poco rispetto addimostrasi verso quel genio: ed io replico che anche in filosofia il culto va distinto dalla superstizione (§. 168 e 169).

117. Quanto deforme e perniciosa cosa ella è mai la brama di figurare al di sopra dei propri meriti, e quanto funesta la cecità che fa disconoscere la pochezza dei propri

lumi! Mercè l'influenza di queste due figlie dell'umano orgoglio non di rado avviene che taluni, mentre si avvisano di essere dell'edificio delle scienze riformatori celeberrimi, non ne sono all'opposto che deplorabilissimi guastatori. Non sì tosto alcune osservazioni da nulla che vennero loro in pensiero, si veggono da essi verificate nell'angusto orizzonte degli elementi delle scienze, di cui sono precettori, che subito si pongono essi a dettarle *ex cathedra* come nuovi canoni e leggi generali; ed un solo passo poi che essi facciano in seguito oltre alla strettissima cerchia in cui si aggirano le ordinarie cognizioni loro, hanno la spiacente mortificazione di vedersele contraddette. Ai canoni, alle leggi, ai criteri da me nelle passate lettere esposti, sarebbero mai applicabili queste critiche osservazioni? Io ho fondate speranze per credere di no: ma saranno tutti del medesimo mio opinamento? Fra i giovani specialmente di fresco usciti di scuola dare non si potrebbero alcuni, che gonfi un poco per le molte ma superficiali e mal digerite cognizioni in vari rami scientifici apprese, così meco la ragionassero? — Tu nell'ultima tua lettera ti sei trattenuto sul moto uniforme dei corpi ed hai potuto nelle sue leggi verificare i criteri che intorno alla moltiplica e divisione hai stabilito. Ma se tu avessi saputo progredir d'un sol passo più oltre nella teoria del moto uniformemente accelerato, tu in questa unicamente (e senza bisogno di nemmeno progredire più innanzi nei trattati di Fisico-Matematica) trovato avresti formole e nozioni che smentiscono i grossi tuoi farfalloni. Se la dimensione del tuo raggio visuale non fosse tanto meschina, tu vedresti andare in fumo le tue novità: e noi che abbiamo l'occhio un poco più lungo del tuo, trovando nei diversi rami della scienza in cui siamo versati, mille condizioni inesplicabili con i novelli modi tuoi di vedere, abbiamo di essi fatto quel conto che meritano — Ed io a cotesti saputelli che sì pratici

si credono degli immensi spazi dello scibile umano, potrei replicare. Adagio miei cari: che il fumo dell' ambizione non vi trasporti troppo in alto. Questi voli essere potrieno pericolosi per voi « *Piombo e peso, non piume* (vi suggerirebbe Bacone) *aggiungete alle ali del vostro ingegno* » poichè se a voi pure già di queste vestiti, Icari novelli poco esperti nell' arte di Dedalo, avverrà che si sciolga quel mastice, che alle posticcie penne vi lega, io temo assai del vostro destino. Così spiumati tale un capitombolo voi fareste da non poter più risorgere, siccome accadde a quel bipede molto a voi simile per dimensioni di cerebro che il Cinico di Seleucia gittò in faccia al fondatore dell' Accademia, gridando « *ecco l' Uom di Platone* ». Non precipitate così facilmente i vostri giudizi, e vi giovi il sapere, che io prima di esternare e fare pubblici quelli che portan seco qualche novità, ho ben ruminate le cose per la mente, e adagio adagio le ho più fiate per tutti i loro angoli rivoltolate, osservandone minutamente le diverse faccie, e ho cercato di penetrarne le viscere per notomizzarne le intrinseche particolarità, e dopo averne compiuto così un primo esame, sovra le cose stesse sono poi tornato a meditare per più anni di quelli che forse ora conta la vostra età. Sì tutto ciò mi piace che voi sappiate, affinchè vi avvezziate a fare altrettanto, e non già perchè io creda di esigere che voi per questo motivo abbiate a convenir meco. No davvero che non lo pretendo: perchè non trovo per nulla difficile, e non mi recherebbe al certo meraviglia che malgrado le esposte avvertenze, qualche granchio solenne avessi preso pur io. Egli è perciò che le sole prove di raziocinio debbono convincerci; e quali mi si sono schierate al pensiero, tali mi fo tosto ad esporvele; acciocchè ne facciate oggetto di vostra meditazione.

118. Le mie cognizioni in Fisica son ben limitate: ma sino alle leggi del moto accelerato sono pur giunto. Quin-

di come voi, ho studiato pur io qualche poco gli effetti che produce nei corpi una forza accelatrice costante. Questa diversità di risultati ne è però uscita fuori, che cioè, mentre in questi studi voi trovato avete da che combattere le mie teoriche, io all' opposto (vedete armonìa di deduzioni) tutti gli appoggi per confermarle. Nelle dimostrazioni date dal gran Galilei che di quelle leggi fu il celeberrimo scuopritore, voi trovar credete le armi più idonee per abbattere i miei principi, facendo riflettere come concorra a produrre quell' aja triangolare in cui viene rappresentata la somma degli spazi percorsi, ed una linea esprimente la velocità, ed altra linea esprimente il tempo. Voi mi dite quand' anche menar buona ti si voglia che il numero esprimente il tempo non indichi nel calcolo se non il *quante volte* va ripetuto il moltiplicando che è la velocità, troviamo sempre, che mentre la velocità è rappresentata da una estensione lineare, lo spazio percorso lo è poi da una superficie, qual' è l' aja triangolare sopranominata, e non potendosi al certo sostenere che linea e superficie sieno quantità omogenee, ecco a terra i tuoi canoni e che « *le quantità su cui si opera in un calcolo sieno tutte omogenee, e che omogenei sieno sempre il moltiplicando e il prodotto* ». E questa volta per quanto tu ponga a tortura il tuo genio malefico disapprovatore dell' altrui metodo d' insegnare, per quanto ti ponga a lambiccar sottigliezze, oh! questa volta non ti riesce davvero di affacciare obbiezioni e provarci che sia una inesattezza l' ammettere che le somme degli spazi percorsi possano essere rappresentate da triangoli rettangoli simili le cui altezze sieno i tempi e le basi sieno le celerità. Questa rappresentanza, questa similitudine, direbbe Muratori, quadra sì bene per tutte le sue faccie che nulla più. Ed in vero, mi soggiungete, osservatene le mirabili analogie. Nei triangoli simili le altezze sono proporzionali alle basi, e la spe-

rienza ci mostra che i tempi espressi per le altezze sono proporzionali alle velocità espresse per le basi. Nei triangoli simili le aje stanno tra loro come i quadrati dei lati omologhi: e la sperienza ci mostra che le somme degli spazi percorsi sono come i quadrati dei tempi impiegati a percorrerli, e delle rispettive velocità in fine di essi tempi acquistate: di più l' aja del triangolo elementare che sta al vertice dell' aja triangolare, e poi le aje dei trapezi rettangoli che si vanno succedendo al primo triangoletto aventi per altezze le linee uguali esprimenti le successive unità di tempo se si suppongono misurate dal triangoletto elementare, procedono nella serie dei numeri impari 1, 3, 5, 7. . . . . e la sperienza ci mostra appunto che gli spazi percorsi nei successivi tempi separatamente considerati, in questa serie stessa procedono. Il rettangolo avente per lati attigui la linea esprimente la velocità acquistata dopo un dato numero di unità di tempo e la linea esprimente un tempo uguale al percorso, si osserva esser doppio del triangolo che esprime la somma degli spazi già percorsi, e di fatto lo spazio descritto dal mobile in grazia della somma della velocità acquistate, cessando di agire la forza sollecitatrice, è realmente doppio dello spazio percorso nel tempo antecedente. Che si desidera di più dopo tutte queste corrispondenze? Questa, si chiama evidenza geometrica; e tu non hai nulla al certo da replicare contro gli evidenti geometrici nostri rilievi.

119. Eppure, se il permettete avrei qualche cosa ad opporvi; e non già cosa del mio, ma di proprietà di alcuni miei Allievi, le cui difficoltà, quando di svegliato ingegno essi sieno, meritevoli sempre sono di somma ponderazione. Io trovo, mi diceva l' un di essi, esattissime le applicazioni delle proprietà dei triangoli simili alle leggi del moto uniformemente accelerato: ciò non dimeno per quanto io mi affatichi, non so convincermi, come avvenir possa che

lo spazio percorso da un mobile, mentre è dai fisici (pochissimi eccettuati) rappresentato da una linea nel moto uniforme, abbia a cambiare natura, ed essere rappresentato da un triangolo nel moto uniformemente accelerato. La traccia battuta dal mobile nel suo cammino è, non vi ha dubbio, una superficie, e non una linea, ma noi facendo astrazione da ogni larghezza, non consideriamo nello spazio percorso che la sola lunghezza, tanto se il mobile cammina con un moto uniforme, che se con un moto accelerato. E perchè dunque il sentiero percorso è rappresentato da una retta nel primo e da una superficie nel secondo caso? E perchè nella teorica delle leggi del moto uniformemente accelerato dobbiamo riguardare lo spazio come una superficie, se poi nelle applicazioni e nelle sperienze dirette a verificare queste leggi, sia che con Galileo ricorriamo al piano inclinato, sia che uso facciamo della macchina d' Adwood, gli spazi percorsi sono valutati sempre per linee rette? Si dirà forse che un adulto ha percorso uno spazio doppio di quello che ha percorso un bambino allorchè hanno entrambi fatta la stessa strada, perchè la pianta del piede dell' adulto ha una superficie doppia di quella del bambino? Ed una strada che era due miglia, potrà forse dirsi essere divenuta otto miglia per la ragione che senza alterarsi affatto nella sua dimensione longitudinale, si è resa quattro volte più larga di quello che era? La minore o maggior superficie di quella linea materiale di cui ci serviamo per valutare le distanze non ha influenza alcuna sulle distanze medesime, poichè la larghezza è una dimensione da cui facciamo astrazione nella valutazione delle linee. Come va dunque che non una linea ma una superficie, e precisamente un aja triangolare è la rappresentante degli spazi percorsi dai corpi con moto accelerato? Queste difficoltà io sono d' avviso che bastino per sè sole a fare svanire la decantata evidenza dei vostri ri-

lievi — Ma come dubitarne potrebbero soggiungermi, se in quasi tutti i corsi di Fisica trovasi introdotto l'uso di spiegar le leggi del moto uniformemente accelerato per mezzo dell'aja triangolare in ossequio di Galileo, che ne fù l'inventore?

120. Eppure le leggi del moto accelerato, io replico, non ricevono schiarimento alcuno dalle idee sensibili delle figure che ai nostri sguardi sottopone la sintetica costruzione. E poichè dessa anzi dà origine alle difficoltà sopra esposte, ella, a me sembra utile cosa, l'eliminarla dai corsi elementari di Fisica, e quando ciò non piacesse, io poi trovo allora indispensabile il trattenersi nel dettaglio di tutti que' schiarimenti i quali servono ad appianare le difficoltà che insorgono negli Allievi al vedere rappresentata da una superficie una estensione lineare: ma con mia dispiacenza questi schiarimenti sono fin qui un desiderio. Io mi sono preso il piacere di scorrere la dimostrazione sintetica delle leggi del moto uniformemente accelerato data da molti e molti trattatisti: non ho trovato che il solo Hauy che abbia dato qualche cenno (e questo solo in nota e quasi alla sfuggita e per incidenza) atto a sciogliere la difficoltà sopra esposta, allorchè si è così espresso « *Si può prendere liberamente la superficie d' un triangolo per rappresentare uno spazio in lunghezza o una semplice dimensione, ponendo col pensiero un dopo l' altro tutti gli elementi del triangolo* ». Questa idea però meritava di essere un poco più sviluppata: era bene cioè che avesse egli fatto conoscere che per gli *elementi di questo triangolo collocati l' un dopo l' altro*, s' intendono le piccole rette o parti che compongono la retta rappresentante lo spazio descritto dal mobile, e che perciò questo spazio è rappresentato dalla somma di queste piccole rette nella stessa direzione l' una all' altra addizionate, e non già dall' aja triangolare che rappresentare possono sotto altra disposizione riunite.

Nè basterebbe dire agli Allievi , badate bene , che noi non diciamo già che le aje triangolari esprimono gli spazi percorsi dal mobile , quasi che vi volessimo far credere che essi sieno superficie e non linee : noi vi diciamo soltanto che queste aje *rappresentano* gli spazi rettilinei percorsi , con che vogliamo significarvi che ai medesimi esse sono soltanto proporzionali . Questa dichiarazione a mio parere non suffragherebbe , poichè se lo spazio percorso dal mobile è a ragione espresso da una linea quando è destinato ad esprimere la velocità la quale non può in altro modo essere rappresentata , e perchè questo spazio stesso ripetuto per più unità di tempo debbe essere rappresentato da una superficie ? Questa difficoltà rimane sempre insoluta .

121. Per eliminarla , bisogna fare agli Allievi conoscere , che se si prenda in considerazione la durata di un secondo , si può questa concepire divisa in un grandissimo numero di tempuscoli d' inapprezzabile durata che possiamo perciò chiamare attimi o istanti , e p. es. in mille , e che la parte del *rettilineo* sentiero che dal mobile è stata percorsa nell' ultimo istante millesimo del minuto secondo per la natura del moto uniformemente accelerata è più lunga di quella che è stata percorsa nell' istante antecedente , e questa più di quella percorsa nell' istante che lo precede , e così di seguito , retrocedendo nei successivi istanti , finchè diviene tenuissima e come un semplice punto la parte percorsa in seguito del primo impulso : chiaro anzi risulta che chiamato s questo spazio percorso nel primo *ennesimo* istante del primo minuto secondo , quello che percorre nell' istante seguente in grazia del primo e del secondo impulso sarà $2s$, sarà $3s$, $4s$ . . . negli istanti successivi in grazia del sempre nuovo impulso che in ogni successivo istante si aggiunge agli antecedenti .

Ciò posto , conviene agli Allievi stessi far bene intendere che tutte queste disuguali millesime parti dello spazio

percorso dal mobile in un minuto secondo, cioè s, $2s$, $3s$, $4s$ . . . appunto perchè parti d'una medesima retta, trovansi tutte, come la natura del moto esige, l'una dopo l'altra in una medesima direzione, e in pari tempo far pure avvertire che quantunque facciano parte di una unica retta, pure niuno ci vieta che la nostra immaginazione conceda ad esse un altro collocamento, sicchè su di questo, appoggiandoci ad un metodo d'istruire non certamente dei più felici, possa fondarsi la dimostrazione delle leggi del moto uniformemente accelerato. Per tale oggetto, facciamoci a concepire queste mille lineette tutte disuguali non più costituenti un'unica linea: stacchiamole anzi l'una dall'altra e collochiamole tutte tra loro parallele ed attigue in una posizione orizzontale, facendo sì che abbia ciascuna principio lungo una medesima verticale in modo che in basso siavi quella che corrisponde all'ultimo millesimo istante del minuto secondo, la quale è la più lunga, e così superiormente ad essa le altre che sono gradatamente decrescenti, finchè a quella giungiamo, corrispondente al primo impulso, la quale si confonde col punto. E' chiaro che queste lineole in virtù dell'insensibile elemento di larghezza di cui la nostra immaginazione le suppone fornite, rappresentano nel loro insieme un'aja triangolare, sono cioè quegli elementi costitutivi del triangolo rettangolo, che Hauy nomina, ma con troppo laconismo, nella sua nota da me sopra riferita. E di questo triangolo il cateto a base orizzontale è la maggior lineola percorsa nell'ultimo millesimo istante del minuto secondo, il cateto o altezza verticale è costituito da tutti i mille punti estremi delle mille lineole corrispondenti ai mille istanti in cui si è supposto diviso il secondo, cosicchè viene anche ad esprimere il numero di questi istanti; e l'ipotenusa è costituita dagli altri punti estremi delle stesse decrescenti lineole le quali debbono precisamente nell'ipotenusa aver termine, perchè in

cotal guisa essendo basi di tanti triangoli simili decrescenti, sono proporzionali alle respettive altezze siccome il debbono essere a motivo che desse esprimono le velocità, e le altezze esprimono i tempi corrispondenti; e non lo sarebbero se alla ipotenusa non giungessero o la sorpassassero.

Con queste dichiarazioni gli Allievi intendono bene, che lo spazio percorso dal mobile è realmente rappresentato non da una superficie ma da una retta, e che è la nostra immaginazione quella che 1.° col concepire l' una dall' altra distinte le mille parti ineguali che quella retta costituiscono, 2.° col loro concedere un elemento di larghezza, e 3.° col supporle tutte parallele ed attigue, passa a ravvisare nel loro insieme un' aja triangolare. Così le difficoltà che si affacciavano alla mente degli Allievi sul non potere intendere come lo spazio percorso dal mobile in un secondo possa essere rappresentato da una superficie, non ha più luogo perchè a rigore è rappresentato da una retta: la verità dei miei criteri sulla necessaria omogeneità di tutte le grandezze sulle quali in uno stesso calcolo si opera, e quindi sulla omogeneità del moltiplicando e del prodotto non trova affatto eccezioni nelle teoriche del moto uniformemente accelerato; ed io anche questa volta ho la soddisfazione di farvi toccar con mano che in apparente opposizione ai sopranominati criteri sembrano essere alcune fisiche nozioni, finchè si affacciano alla mente mal digerite e inesatte, e non appena vengono queste rettificate, ogni contradizione è svanita.

Lo spazio percorso dal mobile in un secondo è dunque rappresentato da una linea. Che poi la nostra immaginazione possa distaccarne le parti, e quindi concepirle collocate le une attigue alle altre e parallele in modo da formare tanti triangoli simili successivamente crescenti, sicchè possano sulle proprietà dei medesimi fondarsi delle dimostrazioni niuno può vietarlo, ma niuno ancor può vietarmi

dal rimarcare che lo stabilire le analogie dimostrative delle leggi del moto uniformemente accelerato su questa arbitraria e non naturale collocazione delle lineole esprimenti gli spazi percorsi negl' istanti successivi costituenti il secondo, è un appiccicare la dimostrazione ad un semplice attaccagnolo e non è un farla fluire spontanea dalle condizioni stesse del moto. Ella è perciò tale, ingenuamente parlando da non meritare l' approvazione dell' imparziale filosofo. Ciò non ostante però sull' esempio di Galileo molti Fisici ciecamente a questa sorta di dimostrazione hanno fatto ricorso. Anzi hanno creduto così essenziale che lo spazio percorso sia rappresentato da un aja triangolare, che a questa si è perfino dato il nome di *piano delle velocità*. Ma l' accordarle questo nome è cosa tanto irragionevole, quanto irragionevole sarebbe chiamare *piano delle misure rettilinee* quel rettangolo che ci salta agli occhi dopo che abbiamo ripiegato un metro tascabile, quel rettangolo dico, che ha per lunghezza quella di ciascuno dei pezzi eguali che l' uno dell' altro a ridosso si adattano, e per larghezza la somma di tutte le singole spessezze dei pezzi medesimi. Che ha che fare, voi mi direste, questo piano rettangolare nato per una mera incidenza, nato per procurarci la comodità di tenere in tasca lo strumento misuratore, col fare combaciare l' uno presso l' altro i diversi pezzi che formano questo metro tascabile, che ha che fare colla dimensione lineare che è destinato a misurare? Quali stretti rapporti vi presenta da meritare il nome di piano delle misure rettilinee? Ebbene, consimile è l' obbiezione che può farsi al piano delle velocità. Giova non v' ha dubbio ajutar l' immaginazione con oggetti sensibili, ed è perciò che la Geometrìa vi si presta a meraviglia col sussidio delle figure. Ma l' istruttore nella scelta di questi sussidi conviene che abbia criterio, sfugga quelli che produrre possono difficoltà, e a quelli si appigli che secondano la natura

delle cose a dimostrarsi. Perchè esprimere il sentiere rettilineo percorso da un mobile con moto accelerato per mezzo di tante linee parallele ineguali che rappresentano un triangolo, in opposizione alla natura delle cose, e non piuttosto secondar la medesima, esprimendo il sopra nominato sentiero con un unica retta divisa in parti ineguali di grandezza determinata dalla sperienza e dalla natura del moto? E non possiamo ciò fare dando anche corpo alle astratte idee col ricorrere allo spazio descritto da un grave cadente, e precisando per ajuto dell' immaginazione anche la reale quantità di spazio che per la forza di gravità il mobile descriverebbe? Se io giungerò a dare alla luce un trattato elementare di Fisica, mi atterrò a questo partito, e con l' applicazione delle sole teoriche esposte nei miei elementi di Matematica, senza affatto ricorrere al calcolo differenziale, e senza far uso di quel genere di dimostrazioni dette indirette o per l' assurdo (perchè mi sembra che si faccia più breccia nell' intelletto mostrando che la cosa è, di quello che mostrando che la cosa debbe essere perchè il contrario è impossibile) ecco come io esporrei le teorie del moto uniformemente accelerato.

122. Dopo di avere richiamato le idee preliminari per le quali risulta che a cagione della inerzia dei corpi una forza istantanea produce un effetto vario negli istanti successivi: dopo di aver ritornata al pensiero l'idea che l' azione del momento fa sì che i corpi per una stessa direzione descrivano spazi eguali in tempi eguali, perchè in ogni successivo istante conservano quell' attitudine al moto che hanno ricevuto a principio, e che un' azione costante, l' azione cioè d' una forza unica che imprime nei corpi senza interruzione alcuna per tutta la durata del moto in ciascuno dei successivi eguali istanti del tempo un nuovo egual grado di velocità, fa sì che i corpi per una stessa direzione descrivano spazi che aumentano in ogni successivo i-

stante d' una sempre uguale quantità , perchè senza nulla perdere gl' impulsi acquistati , in ogni successivo eguale istante altro eguale impulso ai già accumulati si aggiunge , così proseguirei .

123. Stabilita per unità di misura del tempo una quantità di tempo qualunque, e p. es. quella più piccola che negli usi ordinari della vita suole essere apprezzata dall'uomo, qual' è il minuto secondo , ben chiaro scende dalla data idea del moto accelerato , che lo spazio che un mobile percorre nel 2° minuto secondo è maggiore di quello percorso nel 1°, quello percorso nel 3° è maggiore di quello percorso nel 2° ec. E da ciò apparisce che nelle diverse fasi del moto accelerato la velocità del mobile è tanto maggiore, quanto maggiore è il numero delle unità di tempo ossia dei secondi percorsi dal principio del moto. E in ciascuno poi dei successivi secondi, lo spazio che il mobile descrive è l' effetto di due cause ben distinte , della somma cioè degli impulsi che ha ricevuto sino al fine del minuto secondo antecedente , e di quelli che va ricevendo nel minuto secondo attuale. La prima causa distinguesi dai Fisici col nome di *forza impressa* , poichè non è forza che rinnuovi i suoi impulsi , ma prosegue ad agire nel corpo per l' attitudine che ha già *impresso* e che in grazia della sua inerzia il corpo conserva. La seconda causa che incalza il mobile con sempre uguali novelli impulsi negli istanti successivi dicesi *forza motrice* perchè *continuamente* sospinge ; ed è molto interessante distinguere l' effetto prodotto dall' una e dall' altra forza , per la sintesi delle quali (una volta che le abbia distinte la mente) risulta la forza acceleratrice costante. Quell' attitudine al moto poi che un mobile ha acquistato in grazia dei soli impulsi ricevuti al fine del primo minuto secondo ; dicesi *velocità iniziale* o *primitiva* , perchè acquistata nella *prima* unità di tempo . Quell' attitudiue al moto poi , che il mo-

bile acquista al fine di due, di tre, o di qualsiasi determinato numero di secondi chiamasi *velocità finale*; e giusta il concetto che della velocità ci siamo formati, e che è sempre il medesimo ed invariabile in tutte quante le varie condizioni del moto, questa velocità finale non può essere rappresentata che dallo spazio che il corpo descriverà in una sola unità di tempo, cioè in un secondo, in grazia dei soli impulsi che ha già ricevuto e senza che altri ne vada più ricevendo. Questo spazio però non potrà colla sperienza determinarsi, se non allorquando alla fine del dato numero di secondi siasi fatta cessare nel mobile l' azione della forza acceleratrice. Allora infatti il mobile non può continuare a muoversi che in virtù delle impressioni ricevute sino a quell' attimo finale; e come se spinto si trovasse da una forza istantanea eguale alla somma di tutti gli impulsi sino a quel punto communicatigli dalla forza acceleratrice, comincerà a descrivere spazi eguali in tempi eguali, diverrà cioè uniforme il suo moto.

Non solo dunque nel moto uniforme, ma anche nel moto uniformemente accelerato la velocità è sempre rappresentata dallo spazio percorso dal mobile in una data unità di tempo con moto uniforme, poichè nell' invariabile concetto della velocità, essa non può essere rappresentata che da quell' unica qualità di moto.. La differenza essenziale e caratteristica fra il moto uniforme e l' uniformemente accelerato relativamente alla celerità in ciò solo è riposta, cioè che nel moto uniforme, in qualunque stadio della durata del moto essa si consideri, sì cioè al fine di uno, di due, di tre ec. secondi, è sempre la stessa, laddove nel moto accelerato trovasi successivamente accresciuta. Ed è in grazia appunto di queste successive differenze che noi non possiamo formarci una giusta idea del moto uniformemente accelerato di un mobile, se non consideriamo le velocità da esso possedute alla fine di 1, di 2, di 3 ec. secondi e

quindi la legge del loro incremento. La celerità *iniziale* posseduta dal mobile in fine del primo minuto secondo si è chiamata g, la *finale* poi posseduta in fine di un numero t di secondi si è chiamata v. Sì g che v non sono dunque che spazi rettilinei ambedue percorsi (notatelo bene) con moto uniforme, ambedue percorsi in un solo minuto secondo, ambedue percorsi in grazia delle sole *forze impresse* indipendentemente da qualsiasi forza motrice: ma g è spazio percorso con le forze acquistate in fine del primo minuto secondo semplicemente, v è spazio percorso con la somma delle forze acquistate in fine di t secondi. Quindi g non è che il risultato della osservazione e della sperienza; v può essere anche il risultato del calcolo basato sulla natura già confermata dall' esperienza della forza acceleratrice, quando sia nota g: e come v si ottenga, osserviamo.

124. Se la forza acceleratrice cessasse alla fine del 1.° minuto secondo, il mobile in grazia degli impulsi ricevuti, ossia della velocità di cui trovasi in possesso al fine del 1.° minuto secondo descriverebbe con moto uniforme in ciascuno dei minuti secondi successivi uno spazio che abbiamo chiamato g, che è perciò il rappresentante della celerità in fine del 1.° minuto secondo. Se la forza acceleratrice in vece di cessare alla fine del 1.° minuto secondo cessasse alla fine di due secondi, il mobile in ciascuno dei minuti secondi successivi percorrere dovrebbe uno spazio eguale a $2g$, cioè g in grazia della velocità acquistata per la somma degli impulsi ricevuti ossia per la *forza impressa* sino al fine del primo minuto secondo, ed altro spazio eguale a g in grazia degli impulsi che gli verrebbero communicati dalla *forza motrice* nei successivi istanti costituenti il 2.° minuto secondo, in cui ha proseguito ad agire sul mobile, come agì nel 1°. E questo spazio $2g$ sarebbe perciò il rappresentante della velocità posseduta in

fine di 2 minuti secondi. In egual modo si proverebbe essere $3g$ lo spazio rettilineo rappresentante la velocità in fine di 3 minuti secondi . . . . ed essere Tg la velocità posseduta in fine del numero T di secondi; e poichè la velocità posseduta dal mobile in fine di T secondi è quella appunto che è stata chiamata v, avremo la formola interessante caratteristica del moto uniformemente accelerato

$$v = Tg$$

e per un altro numero T' di secondi

$$v' = T'g$$

donde

$$v : v' = Tg : T'g ; \text{ e } v : v' = T : T',$$

cioè *le velocità possedute dal mobile in fine dei diversi tempi sono proporzionali ai tempi* . (I.ª Legge)

125. E badate bene direi di non dimenticar quel precetto che io vi ho già ripetuto e ripeterò più volte, e non mai quanto il bisogno lo esige, sebbene per taluno lo avrò ripetuto fino alla nausea, badate bene a non fermare l' attenzione vostra sui soli segni delle formole finali dei calcoli, ma prendete l' abitudine di fissarla sulle idee di cui que' problemi non sono che un segnale. Non cadete nel maiuscolo inganno in cui sono taluni, di tutte guardare ad un modo le algebriche espressioni, a null' altro prestando attenzione che a quel semplice lavoro meccanico col quale si ottengono. Quante volte avrete visti anche voi cotestoro di sè così soddisfatti che pare abbiano proprio toccato il cielo colle dita, allorchè dopo di avere scarabocchiato più pagine, sono giunti finalmente col meccanismo del calcolo a tirare fuori la formola che un Autore aveva indicato doversi da certe altre dedurre; e quasi fuor di sè per la gioia, non darsi (notate squisitezza di criterio) non darsi affatto il menomo carico di conoscere che significhino le cose che hanno ottenuto. Io torno spesso a battere questo chiodo, ed oh! potesse il mio martello ben

raddrizzarlo, poichè è qui appunto dove l'odierno insegnamento zoppica assai; e la superficialità delle cognizioni ne è la conseguenza immediata. Questo camminar miglia e miglia e sempre per i campi dell'astrazione in mezzo alla più desolante sterilità, senza incontrar mai un oggetto palpabile, un' applicazione che dia un colorito alle languide idee astratte, egli è un dare pessime abitudini alle facoltà intellettive. Giovani così educati, e divenuti eccellenti nella meccanica calcolazione in grazia degli studi completi fatti nelle matematiche discipline, oh! quante volte *nubes et inania captant*, senza sapere rendervi il menomo conto e del significato e dell' oggetto, e dello scopo cui mirano quelle formole che sì eccellentemente hanno essi saputo dedurre!!! Badate bene perciò a non trattare le formole algebriche finali come trattereste que' simboli algebrici che io chiamo intermedi e di passaggio. Su questi scorrete pure di volo col vostro pensiero: di quelle cercate sempre afferrare il concetto. Qnando i simboli algebrici sono un veicolo, un ponte di transito, rammentatevi che essi sono istrumenti appositamente inventati per abbreviare e facilitare il lavoro della mente, e darle un riposo, riducendo a puro meccanismo ciò che senza di essi esigerebbe lungo sforzo di riflessione. Essi assoggettati a certe operazioni delle quali l' evidenza è innegabile, vestono talvolta delle forme incomprensibili, divengono enti fittizi, simboli di non enti pur anche: eppure ciò null' ostante sono utilissimi, giacchè coll'eliminarsi alla fine il fittizio, l' inconcepibile, l' impossibile, o col rimanere persistente in prova dell'assurdità delle cose cercate, si ottengono sempre dei risultati finali interessantissimi. Ora il non trattenere la mente nelle idee ai simboli relative quando essi sono espressioni di passaggio, è un toglierla saggiamente ad inutili perditempi, è un secondare il fine pel quale i simboli algebrici sono inventati, è un profittare dei preziosi loro vantaggi.

Il non trattenere però la mente nelle idee ad essi simboli relative, allorchè essi sono degli ultimi risultati, contentarsi per esempio di osservare che l' equazione $v = gT$ scende legittimamente da alcuni stabiliti principi senza richiamarne le idee, questo è un vero favorire l' ignoranza. E voi così facendo, vi condurreste a modo di chi avendo posto un minuzzolo di carta entro la tabacchiera per un ricordo, al rivederlo, si occupasse ad osservare se abbia figura triangolare o quadrilatera, se sia secco od umido, se odori o no, anzichè forzare la mente a dirigersi su quella idea per rammentare la quale e non per altro oggetto appositamente nella tabacchiera fu posto.

Si: allorchè avete ottenuto $v = gT$ rammentatevi bene del valore che abbiamo dato in addietro alle lettere v, g, T; e vi accorgerete che la sovraesposta formola significa che v cioè lo spazio rettilineo descritto dal mobile con moto uniforme nell' intervallo di un solo secondo in grazia della somma degli impulsi acquistati dalla forza acceleratrice durante il numero T di secondi, ossia lo spazio rappresentante la velocità che ha il mobile al fine di T secondi, è uguale a quella retta che risulta dal ripetere T volte (tante volte cioè per quante ne indica il numero T dei secondi) lo spazio rettilineo g che il mobile avrebbe descritto con moto uniforme nello stesso intervallo di un solo secondo, in grazia della somma degli impulsi acquisiti in fine del primo. Un mobile in ultima analisi, se in grazia della forza acceleratrice che cessi di agirvi al fine del 1.° minuto secondo acquisti tale celerità g da percorrere con moto uniforme metri 10 per es. per secondo, in grazia della stessa forza acceleratrice che in esso cessi di agire non al fine di uno ma al fine di T, al fine per es. di 8 secondi, acquista tale celerità v da percorrere con moto uniforme l' ottuplo di metri 10, ossia metri 80 per ogni secondo.

Ed è ben questo, parmi sentir soggiungere con la più

invidiabile franchezza del mondo, egli è ben questo quello che tutti sanno ed ammettono: sono ben queste le idee che tutti associano alla formola $v = gT$. — Ed io replico, che gradirei vi esprimeste un poco diversamente per cogliere nel vero: dire dovete cioè che tutti chiamati e forzati a portare la loro riflessione sulle idee risvegliate dai simboli $v = gT$, non possono certamente a meno di non convenire sull'esposto: dire dovete che tutti, se si fossero formati quell'aurea abitudine, che tanto io raccomando, di non lasciarsi sfuggire le formole finali senza molto riflettere sul loro significato, tutti *vedrebbero* nella formola $v = gT$ quanto ho sopra enunciato. Si tutti *vedrebbero*, ma non già tutti *veggono*, perchè in tal caso tutti si sarebbero accorti che il prodotto gT, ossia v, quand' anche volesse considerarsi per un semplice rappresentante, non può mai essere una superficie, ma è uno spazio necessariamente rettilineo, siccome è il moltiplicando g, il quale viene ripetuto T *volte*: tutti si sarebbero accorti che il moltiplicatore T indicante il numero dei secondi, è una quantità la quale (sebbene sia misurata anch' essa dallo spazio) è però eterogenea allo spazio descritto dal mobile, e perciò non entra nel calcolo come una quantità indicante oggetti, ma come una quantità indicante ripetizione, indicante cioè il quante volte va ripetuta una retta per formare il prodotto che non è perciò che una retta; e quindi tutti si sarebbero accorti che la formola $v = gT$, non distrugge (siccome opinano quelli che goffamente veggono in v un' aja prodotta dalle linee g e T) ma conferma le teorie ed i criterj da me stabiliti intorno alla moltiplica, siccome mi era proposto di dimostrarvi.

126. Ma qualche opposizione a questi criteri potrebbe forse trovarsi in seguito, e perciò proseguiamo innanzi nello studio delle leggi del moto accelerato ad oggetto di toglierci di ogni dubbio. E per formarci delle chiare nozioni in pro-

posito, applichiamo alla gravità le idee che andremo sviluppando.

Primo a formarsi idee esatte sulla sua natura fu il celebre Galileo allorchè la riconobbe per una forza acceleratrice, la quale sebbene decresca in ragione inversa dei quadrati delle distanze, pure si può considerare costante finchè si tratti di altezze trascurabili in confronto al raggio della nostra terra. E una volta che siasi, siccome lo fu da Galileo, definita l' indole e natura di questa forza, del suo cioè costante modo di agire, il calcolo determina tosto la specie di movimento che risulta nei gravi che sono ad essa soggetti; determina tosto cioè i rapporti tra gli spazi, i tempi e le velocità.

Duopo è però partire da un dato di osservazione. Dai risultati delle celebri sperienze da Galileo eseguite sopra corpi assai densi e fatti cadere dall' alta torre di Pisa, risultati che furono rettificati poscia dagli esperimenti e dai calcoli di Hugenio, e meglio in seguito da quelli sul pendolo eseguiti da Borda a Parigi, e da quelli fatti colla macchina di Adwood, risulta che un grave con la velocità sola che ha acquistata al fine del 1.º minuto secondo, percorre in ciascuno dei secondi susseguenti metri 9,8 alla latitudine di Parigi. Le sperienze dunque per rapporto alla gravità ci danno questo dato $g = 9^m, 8$.

Ma se $9^m, 8$ è lo spazio percorso dal mobile con moto uniforme nel 2.º minuto secondo, essendo al termine del 1.º cessata sul mobile la forza di gravità, siccome il minuto secondo, sebbene sia la più piccola tra le unità di tempo apprezzate dagli uomini, pure è tale da ben lasciarci distinguere il principio, il progresso ed il fine, così lo possiamo riguardare composto di un grandissimo numero t di tempuscoli, ossia di attimi o istanti, p. es. mille (a).

(a) Del numero 1000 può non trovarsi soddisfatta la nostra immaginazione. Ed in vero anche il millesimo di secondo essendo una frazione

127. Proprietà poi essenziale dell' attimo o istante si è quella di avere una durata che si confonde col suo principio, ossia di non ammettere in sè successione, motivo per cui se possiamo usare le espressioni « *al principio o al fine di un secondo* » non possiamo senza contradirci, usare l' altra « *al principio o al fine di un istante* » ma convien dire « *nell' istante* » Ciò posto è ben chiaro che siccome nei fenomeni naturali la causa precede l' effetto, così l' istante in cui essa comincia ad agire, è distinto dall' istante in cui il mobile comincia ad obbedire. Quindi è ben chiaro che il mobile, uscendo dal suo stato di quiete in cui la sua velocità è zero, e cominciando a muoversi *dopo* il primo impulso, non può cominciare che nel 2.° istante ad esprimere col suo moto l' effetto dell' azione che la forza ha sopra di esso esercitato nell' istante 1.°, e addizionandosi in ogni successivo istante un impulso eguale al primo (atteso il conservarsi e perpetuarsi in esso in virtù dell' inerzia la velocità impressagli dai successivi impulsi) lo spaziolo in ciascuno istante percorso sarà maggiore di quello che nell'antecedente ha descritto. Perciò, chiamato d lo spaziolo che il mobile percorre in virtù dell' impulso ricevuto nel 1.° istante, avremo *zero* per lo spaziolo corrispondente all' istante 1.°: d percorrerà il mobile nell'istante 2.°, $2d$ nel 3.°, $3d$ nel 4.° . . . . $(t-1)d$ nel *tiesimo* istante, e td nell' istante 1.° del 2.° minuto se-

di tempo, che è la misura delle nostre successioni, non può di successione essere privo: quindi fornito anch' esso di principio, proseguimento e fine, non può confondersi con l' istante in cui a rigore non vi è tempo: né può perciò con l' istante confondersi qualunque altra frazione di secondo la più piccola ideabile, finchè col suo impiccolirsi non sia per cessare di essere. Ma se fra il millesimo di secondo e l' istante vi è tanta distanza, e se ciò non di meno il millesimo di secondo è tal frazione di tempo che noi non siamo in grado di avvertire, chi da ciò non ravvisa l' assoluta impossibilità di avvertire gli istanti e distinguerli gli uni dagli altri?

condo per l'addizione che agli antecedenti impulsi si fa di quello che va a ricevere nell'ultimo istante del 1.° secondo.

128. Dall'esposto risulta che se venga con la seguente formola (A) indicata la serie dei successivi istanti o tempuscoli, la (B) quella esprimerà dei successivi spazioli

(A) *Tempuscoli* $\div$ 1 . 2 . 3 . 4 . . . t . $(t+1)$

(B) *Spazioli* $\div$ 0 . d . $2d$. $3d$ . . . $(t-1)d$. td

E la (B) ci manifesta che lo spazio percorso da un mobile sotto l'azione di una forza costante in una data unità di tempo, e sia pure la più piccola in uso, qual'è un secondo, puo riguardarsi come una serie di piccolissimi spazioli in ogni successivo istante crescenti dal primo in cui lo spazio è zero sino al primo istante inclusivo della seguente unità di tempo, e crescenti di una quantità sempre uguale, ma però tenuissima, perchè uguale sempre allo spaziolo d percorso nel 2.° istante per la velocità impressagli nel 1.°, crescenti perciò nella serie dei numeri naturali, quando il 1.° spaziolo d si chiami 1. Quindi in vece di dire, come si suole comunemente, che il moto uniformemente accelerato può riguardarsi come costituito da una serie di moti uniformi, tutti di una durata sommamente piccola, avuto riflesso che non può la caratteristica del moto uniforme ravvisarsi quando cessi la successione, e questa cessa quando il tempuscolo si confonde con l'istante, volendo esprimerci con più esattezza, dire dovremo, che *il moto uniformemente accelerato si può concepire come costituito da una serie di moti istantanei dotati di tenuissime velocità crescenti nella serie dei numeri naturali*:

129. L'esame della stessa formola (B) ci porta pur anche ad apprezzare la necessità di avvertire non essere a rigore una cosa medesima, come sembra a primo aspetto *lo spazio descritto in grazia dell'azione dagli impulsi esercitata sopra il mobile durante il* 1.° *minuto secondo*, *e lo spazio descritto nel* 1.° *minuto secondo*: quello infatti

contiene oltre questo che è costituito dagli spazioli espressi in (B) sino al termine $(t-1)d$ percorso nel tiesimo istante, anche lo spaziolo td percorso nell' istante $(t+1)$, ossia nel 1.° istante del 2.° minuto secondo.

130. Passiamo ora ad osservare che cosa accadrà, se dopo l' impulso che è stato impresso al mobile nell' ultimo istante del 1.° minuto secondo, la forza costante cessi immediatamente, nè alcuna altra forza nuova agisca in sua vece. Il mobile in grazia e degli antecedenti e dell' ultimo impulso ricevuto nel 1.° minuto secondo descrive nel 1.° istante del 2.° minuto secondo lo spaziolo td, come risulta in (B) Quindi nell' ipotesi stabilita della cessazione della forza, novelli impulsi non si aggiungono al mobile nel 1.° istante del 2.° minuto secondo, cosicchè in questo il mobile altro non possiede che quella velocità che aveva nell' ultimo istante del 1.° minuto secondo. Quindi in grazia di questa velocità risultante dalla somma di tutti i *tiesimi* impulsi ricevuti nella prima unità di tempo, i quali insieme riuniti producono nel 1.° istante del 2.° minuto secondo lo stesso effetto che produrrebbe allora sul mobile una forza istantanea (§.123) il mobile descriverà nel 2.° istante (siccome effetto della velocità posseduta nell' istante 1.°) uno spaziolo td eguale a quello che ha percorso nel 1.° per la velocità stessa di cui si trovava animato nell' ultimo istante del 1.° secondo. Uno spazio td descriverà pure il mobile in grazia di quella velocità sempre eguale di che trovasi in possesso nel 3.°, nel 4.° ed in ciascuno successivo istante del 2.° minuto secondo e nel 1.° istante del 3.° per la immutata velocità di che si trova in possesso nell' ultimo *tiesimo* istante del 2.° minuto secondo.

131. Ora tutti questi spazioli uguali a td che in numero di t il mobile ha percorsi dal 2.° istante del 2.° minuto secondo inclusivamente al 1.° del terzo minuto, costituiscono lo spazio g percorso dal mobile con moto uniforme

in grazia della velocità acquistata in fine del 1.°, è stata in esercizio durante tutto il 2.° secondo, spazio che nel caso particolare della gravità che abbiamo addotto ad esempio del moto uniformemente accelerato, è $9,^m8$. Ciascuno dunque di questi spazioli eguali a td non è che la *tiesima* parte di g, ossia $td = {}^{g}/_{t}$, donde $d = {}^{g}/_{tt}$. Ed ecco così trovato il valore di d, ossia dello spazio percorso nel 2.° istante del 1.° secondo in grazia del primitivo impulso, spaziolo che costituisce la differenza della progressione (B).

E nel caso da noi contemplato della gravità, lo spaziolo td descritto dal grave e nel primo istante del 2.° minuto secondo, e in ciascuno di seguito inclusivamente al primo del 3.° minuto secondo, posto $t = 1000$, è $\frac{9^m,8}{1000} = 0,0098$; e lo spaziolo d descritto nel 2.° istante del 1.° minuto secondo è $\frac{9^m,8}{1000^2} = 0^m,0000098$ che è spazio non apprezzabile ai nostri sensi, siccome non lo è nemmeno il millesimo di secondo. Quindi da ciò si arguisca quanto tenue sia la quantità d, allorchè in vece di concepire il secondo diviso in mille, lo concepiamo diviso in un milione o bilione, o (a meglio dire) in un numero di istanti maggiore di ogni assegnabile.

132. Dalle fatte osservazioni intanto, che ci hanno recato al valore di d, possiamo anche dedurre, che se lo spazio descritto nel 1.° minuto secondo non è uguale allo spazio descritto in virtù dell' azione esercitata dalle forze in questo stesso 1.° minuto secondo (§. 129), non così debbe dirsi il medesimo dello *spazio descritto nel 2.° minuto secondo e dello spazio descritto in grazia dell' azione dalle forze esercitata in esso secondo*, supposta già cessata in fine del 1.° secondo l' azione della forza costan-

te , giacchè questi due spazi sono eguali . Ed in vero , se per aver quello spazio che è descritto in grazia dell' azione dalle forze esercitata nel 2.° minuto secondo , conviene dallo spazio totale percorso nel 2.° minuto secondo togliere lo spaziolo td percorso nel 1.° istante di esso , perchè questo spaziolo è l' effetto delle forze che hanno agito nell' ultimo istante del 1.° secondo , fa d' uopo poi aggiungervi anche uno spaziolo td (uguale a quello che si è tolto) che il mobile descrive nel 1.° istante del 3.° minuto secondo in grazia della velocità posseduta nell' istante ultimo del 2.° minuto secondo . E con lo stesso ragionamento deduciamo che se la forza costante cessi di agire alla fine non del 1.°, ma del 2.° minuto secondo , lo spazio $2g$ descritto nel 3.° è uguale allo spazio descritto in grazia dell' azione dalle forze esercitata durante il 3.° secondo , e così di seguito per rapporto allo spazio $3g$, $4g$ . . . . se la forza costante cessi alla fine del 3.° , del 4.° . . . . istante .

133. Con le acquistate cognizioni , se vogliamo ora trovare che rapporto abbia sì lo spazio percorso dal mobile nel 1.° minuto secondo, che lo spazio percorso dal mobile in grazia dell' azione dalle forze esercitata nel 1.° minuto secondo, con quello g che ha percorso in grazia della velocità sola acquistata in fine del 1.° e stata in esercizio durante tutto il 2.° , otterremo agevolmente l' intento . Sostituendo a d il suo equivalente nella formola (B) al §. 128 , essa si convertirà nella seguente (C)

$$\textit{Negli istanti} \div 1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; t \;.\; (t+1)$$

$$\text{(C)}\ \textit{Gli spazioli} \div 0 \;.\; \frac{g}{t^2} \;.\; \frac{2g}{t^2} \;.\;.\;.\;.\; \frac{(t-1)g}{t^2} \;.\; \frac{tg}{t^2}$$

Ed applicando alla (C) la formola del termine sommatorio, limitando la somma al *tiesimo* termine, ossia prendendo di mira *lo spazio descritto nel solo* 1.° *minuto secondo , risulterà*

$$\text{(D)}\ s = \left(0+\frac{(t-1)g}{t^2}\right)\frac{t}{2} = \frac{g}{2} - \frac{g}{2t}$$

Che se ci piaccia poi di considerare non già il solo spazio descritto dal mobile nel 1.° secondo, ma quello che ha *descritto in grazia dell' azione dagli impulsi esercitata durante il solo 1.° secondo*, è chiaro non doversi altro fare che allo spazio ora ottenuto aggiungere lo spaziolo percorso nel 1.° istante del 2.° minuto secondo, cioè $g/_t$; sicchè si avrà $s = g/_2 + g/_{2t}$. Ed infatti questo risultato stesso direttamente si òttiene prendendo la somma dei termini della (C) inclusivamente all' ultimo termine, giacchè si ha allora

$$(E)\ s = \left(0+\frac{gt}{t^2}\right)\frac{(t+1)}{2} = \frac{g}{2} + \frac{g}{2t}$$

134. Sebbene però questi due rigorosi risultati del calcolo meritino di essere teoricamente distinti, sebbene la loro differenza sia dalla mente concepita, rimarcare giova che non è però suscettibile di essere in atto pratico determinata. Noi non abbiamo nè strumenti misuratori del tempo così delicati, nè così rapida attitudine di mente che valga a distinguere nemmeno i centesimi non che i millesimi di secondo. Sarebbe dunque follia il pretendere di distinguere il primo risultato, ossia lo spazio percorso nel 1.° minuto secondo, da quello che è dal mobile percorso nello stesso 1.° minuto secondo accresciuto soltanto della prima parte millesima del 2.° minuto secondo. Le sperienze eseguite o lungo un piano inclinato o nella macchina di Adwood ci assicurano che fra il batter del campanello al principio del moto e il batter del campanello al fine del primo secondo, il mobile ha percorso uno spazio che è sensibilmente uguale alla metà dello spazio g che percorre nel 2.° minuto secondo con la sola velocità acquistata in fine del primo. Ma notate bene che non potendo qualsiasi percezione andare disgiunta dalla durata, tale ognuno si accorge esser quella dell' avvertita sensazione del suono di un campanello da superare certamente una millesima parte di secondo, qual

abbiamo noi arbitrariamente supposto rappresentare il 1.° istante del 2.° minuto secondo, nel quale il mobile percorre lo spaziolo differenza fra l' uno e l' altro dei nominati risultamenti. Quindi se evidente da questi riflessi risulta la impossibilità di apprezzare questa differenza, quanto più non dovrà risultare manifesta questa impossibilità, quando si rifletta che non la millesima, non la milionesima, ma è la parte d' un secondo più piccola d' ogni immaginabile quella che debbe a rigore considerarsi! E minore di ogni immaginabile debbe al certo ritenersi, affinchè in ciascun corrispondente spaziolo non abbiano a distinguersi parti percorse in eguale durata con crescente celerità, siccome avverrebbe per la natura del moto, se nel tempuscolo potesse distinguersi successione.

135. Quindi è che se vogliamo precisare con matematica esattezza lo spazio percorso nel 1.° minuto secondo, abbiamo $s = {}^{g}/_{2} - {}^{g}/_{2t}$.

Se vogliamo precisare con matematica esattezza lo spazio percorso in grazia dell'azione dagli impulsi esercitata, durante il 1.° secondo, abbiamo $s = {}^{g}/_{2} + {}^{g}/_{2t}$.

Se vogliamo precisare con matematica esattezza la semisomma di entrambi, abbiamo $s = {}^{g}/_{2}$. Ed è questo il risultato che la sperienza dà per l' uno e per l' altro pur anche dei sopranominati due spazi, non essendo possibile di potere sperimentalmente l' uno dall' altro distinguere i loro valori, perchè differiscono d' una quantità inapprezzabile.

136. Convien dunque conchiudere cha a *rigore* la semisomma dello spazio descritto nella 1.ª unità di tempo, e dello spazio descritto per l' azione dalle forze esercitata durante la 1.ª unità di tempo, e *sensibilmente* poi ossia a tenore di quanto possono le osservazioni e le sperienze più delicate fare apprezzare ai nostri sensi *ciascuno dei nominati due spazi è uguale alla metà dello spazio che*

il mobile descrive con moto uniforme in grazia della sola velocità acquistata in fine della prima unità di tempo (Legge II.ª)

Questa II.ª legge del moto accelerato è assai interessante, perchè è dessa a mio credere che serve di base alle altre, anzichè derivare, siccome suole praticarsi, da taluna di quelle.

137. Determinato così lo spazio percorso dal mobile durante il 1.º secondo, passiamo a determinare quello che percorrerebbe per l'azione della forza costante durante il 2.º minuto secondo. Per tale oggetto concepiamo questo spazio come risultante di due, i quali però nella nostra mente soltanto sono distinti. L'uno di questi spazi è quello che il mobile descrive in grazia dei successivi novelli impulsi che riceve in tutti gli istanti che costituiscono il 2.º minuto secondo. E siccome questi impulsi sono eguali a quelli che dalla forza *costante* sono stati impressi nel 1.º minuto secondo, così debbono produrre un effetto che abbiamo provato doversi esprimere per $g/_2$. L' altro spazio è quello che il mobile descrive in grazia della celerità acquistata in fine del 1.º per l'assieme di tutti gl' impulsi, che vestono il carattere di una forza istantanea che farebbe percorrere in ogni successivo secondo uno spazio uguale a g. Lo spazio dunque reale risultante dalla somma dei due fittizi, è rappresentato da $g/_2 + g = {}^{3g}/_2$.

138. Per determinare lo spazio descritto dal mobile in grazia della forza costante che ha agito nel solo 3.º minuto secondo, al $g/_2$ spazio percorso per i successivi novelli impulsi spiegati dalla forza acceleratrice, durante lo stesso 3.º minuto secondo, aggiunger conviene lo spazio $2g$ uniformemente percorso in grazia della velocità acquistata in fine del 2.º minuto secondo; (§.214) ed avremo $g/_2 + 2g = {}^{5g}/_2$.

Con lo stesso ragionamento troveremo che lo spazio percorso nel 4.º minuto secondo è $g/_2 + 3g = {}^{7g}/_2$.

E finalmente lo spazio percorso nel *Tiesimo* minuto secondo sarà

$$\frac{g}{2} + (T-1)g = \frac{(2T-1)g}{2}$$

Quindi gli spazi percorsi sotto l' azione di una forza acceleratrice costante nei successivi secondi sono espressi da questa serie

$$(F) \div \frac{g}{2} \cdot \frac{3g}{2} \cdot \frac{5g}{2} \; \ldots \ldots \; \frac{(2T-1)g}{2}$$

e questa vede ognuno essere una progressione per differenza in cui $d = g$. E considerato il primo termine $g/_2$ come l' unità di misura, fatto cioè $g/_2 = 1$, la (F) si converte nella serie 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . . . . ci esprime cioè che *gli spazi percorsi nei successivi secondi separatamente considerati sono tra loro come i successivi termini della serie degli impari* (III.ª Legge).

139. Se poi ci facciamo ad ottenere la somma dei termini della progressione (F) ad essa applicando la nota formola $S = (a+u)\,{}^n/_2$, e chiamando S la somma di tutti gli spazi percorsi nel dato numero T di secondi, avremo

$$S = \left(\frac{g}{2} + \frac{2Tg-g}{2}\right)\frac{T}{2}$$

e riducendo risulta

$$(G) \; \ldots \; S = \frac{gT^2}{2}$$

risulta cioè che la somma degli spazi o rette costituenti tutto il rettilineo sentiero percorso da un corpo con moto uniformemente accelerato durante un dato numero T di secondi, è uguale al sentiero rettilineo $g/_2$ percorso nel 1 ° minuto secondo tante volte ripetuto, quante sono le unità che costituiscono il quadrato del numero T dei secondi, nei quali

è stato in cammino. Rappresentando poi per S' altro spazio percorso in altro numero T' di secondi, avremo

$$S' = \frac{gT'^2}{2}$$

e quindi $$S : S' = \frac{gT^2}{2} : \frac{gT'^2}{2}$$

ovvero $$S : S' = T^2 : T'^2$$

cioè *le somme degli spazi percorsi sono come i quadrati dei tempi impiegati a percorrerli* (IV.ª Legge).

140. Sostituendo poi v a gT nella formola (G), avremo

$$S = \frac{vT}{2} \quad \text{donde} \quad \text{(II)} \ldots\ vT = 2S$$

e questa (II) ci esprime che v, ossia lo spazio che con moto uniforme in un minuto secondo percorre un mobile in grazia della velocità acquistata in fine di T secondi, nella durata dei quali ha sempre su di esso agìto la forza costante, ripetuto che sia tante volte quanto è il numero T dei secondi, è uguale a $2S$, ossia a due volte lo spazio percorso dal mobile con moto accelerato durante il numero T di secondi. *Un mobile dunque che si muova con moto uniformemente accelerato, acquista al fine di un dato numero di secondi tanta velocità, da percorrere in egual tempo con moto uniforme uno spazio doppio* (V.ª Legge)

141. E sostituendo l'uno all'altro termini equivalenti, e ponendoci ad isolare or l'uno or l'altro elemento nelle formole $v = gT$ ed $S = \frac{gT^2}{2}$ che possono dirsi le fondamentali, derivano da esse con la massima facilità da circa dodici formole che abbracciano tutti i pratici teoremi relativi alle questioni del moto accelerato che qui sarebbe fuor di luogo l'esporre.

E in tutte le leggi del moto ora esposte e nelle formole che abbiamo ora significato potervisi derivare, nulla havvi al certo che non sia consono ai criteri e alle teoriche che nella molti-

plica e nella divisione si sono da me esposte, nulla havvi al certo che ad opinare v'induca, siccome poco esatte dimostrazioni ve lo facevano supporre, potersi dare delle formole nelle quali sieno eterogenei il moltiplicando e il prodotto ed omogenei ambi i fattori.

142. Sì: è d'uopo convenirne, mi si replica, tu in questa dimostrazione non ti sei in conto alcuno contradetto ai tuoi principi, ma ci hai dato al solito una conferma della tua interminabile prolissità. Hai evitate ancora le difficoltà che presenta la dimostrazione del piano delle velocità da Galileo inventata; ma non sei già tu il primo che hai battuto questo sentiero. Leggi p. es. la Fisica generale del Mozzoni: leggi l'articolo sul moto accelerato nel dizionario delle Matematiche di Montferrier, e troverai nel primo oltre la dimostrazione sintetica, l'analitica pur anche, e troverai nel secondo e così in tanti altri Autori, la sola analitica, ma con procedimenti tanto più matematici, semplici e brevi.

Io non dovrei, caro Amico, entrare in queste discussioni sulle quali i miei oppositori mi chiamano perchè estranee all'ussunto di questa lettera, nella quale altro non mi era proposto che il dimostrare che le mie teoriche sulla moltiplica e sulla divisione non erano contradette da quelle del moto accelerato. Ma una digressione in un familiare discorso non sarà un peccato enormissimo: anzi, dovendo una farne per rispondere alle obbiezioni degli avversari, permettetemi che altra ne faccia per soddisfare al desiderio che ho di manifestarvi la soluzione di una difficoltà che intorno alle leggi del moto accelerato mi si era affacciata al pensiero: concedetemi anzi che prima tratti di questa, e questa esaurita, entri sul merito delle dimostrazioni che le leggi sopranominate risguardano. Questa difficoltà non è materia a trattarsi in un corso di Fisica elementare, ma giacchè mi è venuta in pensiere, e qualche cosa pure di nuovo contiene, vi servirà se non altro per esercizio di calcolo.

143. Come conciliasi la terza legge del moto uniformemente accelerato, che gli spazi percorsi nelle successive unità di tempo sieno nella serie dei numeri impari con l'altra (§. 128) che lo spazio percorso può riguardarsi come una serie di piccolissimi spazioli crescenti nella serie dei numeri naturali? Se stà in nostro arbitrio prendere per unità di tempo le parti le più piccole possibili, e non potremo giungere a prendere per unità di tempo gli istanti medesimi nei quali sono percorsi que' successivi spazioli che stanno nella serie dei numeri naturali? Ed allora come in pari tempo star potrebbero nella serie degli impari? No: questa contradizione non può aver luogo giammai, perchè l'esser gli spazi percorsi nei successivi secondi nella serie degli impari, è una legge che riposa appunto sulla proprietà essenziale della unità di misura del tempo, di non esser priva di successione o di parti, e di non poter giammai rigorosamente confondersi coo l'attimo o istante, ma di essere invece sempre la somma di un gran numero di essi. Ed invero, su questi istanti appunto in cui si suppone divisa l'unità di tempo, è fondata quella fittizia distinzione dello spazio percorso nel 2.° minuto secondo in due parti, l'una somma di spazioli tutti eguali percorsi in questi successivi istanti per la forza divenuta istantanea che abbiamo chiamato *forza impressa*, l'altra somma di spazioli successivamente crescenti percorsi in grazia della forza che chiamammo *motrice* (§. 123).

144. Ma ciò pur concesso, si verifica poi che gli spazi percorsi da un mobile nel 1.°, nel 2.°, nel 3.° secondo, ovvero gli spazi percorsi in grazia degl' impulsi che hanno agito durante il 1.°, il 2.°, il 3.° secondo sieno realmente somme di spazioli che stieno fra loro come i numeri impari 1. 3. 5? Supposto per comodità di calcolo, che ogni secondo sia diviso in soli 4 istanti, e chiamato 1 lo spaziolo percorso per l' impulso ricevuto nel 1.° istante,

avremo

Per la somma degli spazi percorsi dal mobile

Nei secondi 1 2 3

$S = 0+1+2+3 \quad +4+5+6+7 \quad +8+9+10+11$

Per la somma degli spazi percorsi per l' azione dagli impulsi esercitata sul mobile

Nei secondi 1 2 3

$S = 0+1+2+3+4 \quad +5+6+7+8 \quad +9+10+11+12$

Quindi facendo le somme parziali dei *primi* quattro termini significativi, dei *secondi* quattro termini, dei *terzi* quattro termini di queste due serie risulta

Per la prima $S = 6+22+38$

Per la seconda $S = 10+26+42$

e questi numeri 6, 22 e 38 e 10, 26, 42 non stanno certamente tra loro nel rapporto di 1 : 3 . 5 come la III.ª Legge esigerebbe.

145. La difficoltà sembra perciò sempre più divenire imponente, e ad oggetto di eliminarla, è d' uopo rammentare i seguenti ottenuti risultati

E I.° Lo spazio descritto in un minuto secondo è espresso a rigore (§. 133) dalla

$$(\mathrm{I}) \div s = 0 + \frac{g}{t^2} + \frac{2g}{t^2} + \ldots\ldots + \frac{(t-1)g}{t^2}$$

$$= \frac{(t-1)g}{t^2} \times \frac{t}{2} = \frac{g}{2} - \frac{g}{2t}$$

II.° Lo spazio descritto per l' azione dagli impulsi esercitata nel 1.° m. secondo è espresso a rigore (§. 133) dalla

$$(\mathrm{L}) \div s = 0 + \frac{g}{t^2} + \frac{2g}{t^2} + \ldots + \frac{(t-1)g}{t^2} + \frac{tg}{t^2}$$

$$= \frac{tg}{t^2} \times \frac{t+1}{2} = \frac{g}{2} + \frac{g}{2t}$$

III.° La media delle due somme (T) ed (L) è $g/_2$.

146. Or se $g/_2$ è la media delle due nominate somme di

spazi, niuna delle due è dunque a rigore uguale a $g/_2$. Egli è perciò ben naturale questa richiesta. « Posto sempre che nel 1.° istante dell' azione l' effetto sia 0 (§. 127) e posto che g sia percorsa nel 2.° minuto secondo con la sola velocità acquistata in fine del 1.°, il che importa che $g/_t$ sia lo spaziolo descritto in ciascun *tiesimo* istante del 2.° minuto secondo e quindi anche nell' istante che segue quello in cui il mobile ha ricevuto l' ultimo impulso nel 1.° minuto secondo (§. 130 e 131) quali spazioli converrebbe fossero percorsi per l' azione esercitata dalla forza acceleratrice sul mobile durante il 1.° minuto secondo, affinchè la loro somma fosse a rigore matematico eguale a $g/_2$? » Questo è un quesito in cui si tratta di trovare la differenza d ed il numero n dei termini d' una progressione, di cui sono dati a che è zero, u che è $g/_t$, ed s che è $g/_2$; giacchè è ben noto che quando è dato a, e si è trovato d, si formano immantinente i termini successivi, e se ne precisa poi il numero o direttamente trovando n, ovvero contando i termini, allorchè formandoli l'un dopo l' altro, siamo giunti a quello che è identico a $g/_t$ che sappiamo per ipotesi dovere essere l' ultimo.

147. Profittando perciò della teorica delle progressioni (Vedi i miei elementi d' Algebra 3.ª edizione §. 864) la formola $d = \frac{u^2-a^2}{2s-a-u}$, posto $a = o$, $u = g/_t$, $s = g/_2$,

cambiasi in $d = \frac{g^2}{t^2} : \left(g - \frac{g}{t}\right) = \frac{g}{t(t-1)}$

e la formola $n = \frac{2s}{a+u}$, cambiasi in $n = \frac{g}{g/_t} = t$,

Quindi la progressione, che ha zero per primo termine, $g/_t$ per ultimo e $g/_2$ per somma dei suoi termini, è la seguente

$$(\text{M}) \div 0 \,.\, \frac{g}{t(t-1)} \,.\, \frac{2g}{t(t-1)} \;\ldots\; \frac{(t-1)g}{t(t-1)}$$

negli istanti 1 . 2 , 3 . . . t

Ed in fatti applicandovi in riprova la formola del termine sommatorio, otteniamo $s = {}^g/_t \times {}^t/_2 = {}^g/_2$

148. Analizzando gli ottenuti risultamenti, rileviamo che la progressione la quale a rigore matematico dà per somma ${}^g/_2$ media delle sopradette due somme è una progressione, il numero dei di cui termini è t, è cioè eguale al numero degli istanti del 1.° minuto secondo, ed è tale che mentre al primo istante corrisponde zero, all' ultimo istante *tiesimo* del primo minuto secondo corrisponde poi per ultimo spaziolo quel termine ${}^g/_t$, che nella formola (C) (§. 133) naturalmente è percorso nell' istante $(t+1)$ ossia nel primo del 2.° minuto secondo. Ora se lo spaziolo ${}^g/_t$ è percorso nell' ultimo istante, l' ultimo impulso che lo ha prodotto ha agito nell' istante, penultimo; e se l' ultimo novello impulso si è ricevuto dal mobile nel penultimo istante, dunque nell' ultimo istante non vi è stato alcun impulso che siasi aggiunto agli antecedenti: dunque la forza converrebbe che avesse il carattere d' intermittente, che agisse cioè con nuovi impulsi in tutti gli istanti ad eccezione dell' ultimo di ogni secondo, cosicchè lo stesso spaziolo che il mobile percorresse nell' ultimo istante di ogni minuto secondo, fosse percorso pure nell' istante che segue.

La progressione (M) dunque, mentre ha per somma la media delle due (I) ed (L) (§. 145), conviene con la (I) nel primo dei termini che è zero, e nel loro numero che è t: conviene con la (L) nel primo dei termini che è zero e nell' ultimo che è ${}^g/_t$.

149. E se la (M) conviene con la (L) negli estremi, potrà convenirvi nel numero n dei termini e nella differenza d? No certamente: poichè se queste due progressioni in uno convenissero di questi due elementi oltre agli estremi a ed u, converrebbero in tre dei cinque elementi loro, e perciò in tutti, e quindi anche in s. Ma in s non possono convenire perchè la (L) ci dà $s = {}^g/_2 + {}^g/_{2t}$ (§. 145) e la (M) ci dà $s = {}^g/_2$ (§. 147):

dunque non possono convenire nè in n nè in d. Ed in fatti il numero dei termini in (L) è $t+1$; in (M) è t. Ed appunto perchè dallo zero si giunge in questa progressione a g/t per mezzo d' un numero di termini minore di 1 di quello che abbia la (L), fa d' uopo che la d di questa progressione sia maggiore che in (L). Ed in fatti

$$\frac{g}{t(t-1)} > \frac{g}{t^2}$$

150. Fatte queste osservazioni, applichiamole al pratico esempio in addietro proposto, facendo $t = 4$ e $g = 1$; e così

In vece della (I) avremo

$S = 0 + {}^1/_{16} + {}^2/_{16} + {}^3/_{16} = {}^3/_{16} \times {}^4/_2 = {}^3/_8$

In vece della (L) avremo

$S = 0 + {}^1/_{16} + {}^2/_{16} + {}^3/_{16} + {}^4/_{16} = {}^4/_{16} \times {}^5/_2 = {}^5/_8$

E la media di ${}^3/_8 + {}^5/_8$ è ${}^1/_2$

In vece della (M) avremo

$S = 0 + {}^1/_{12} + {}^2/_{12} + {}^3/_{12} = {}^3/_{12} \times {}^4/_2$

dal quale ultimo risultato rileviamo che anche nel pratico esempio la somma della progressione (M) è la media delle somme delle altre due.

151. Verificate queste proprietà e così dato termine all' esame dello spazio descritto nel 1.° secondo, passiamo all' esame di quello descritto nei seguenti. Rammentiamo per tale oggetto che uno spaziolo eguale a quello che in grazia dell' impulso ricevuto nell' ultimo istante del 1.° secondo percorre il mobile nell' istante 1.° del secondo seguente, percorre pure nel 2.° e nei successivi istanti del medesimo e nel primo istante pur anche del 3.° secondo in grazia di quella forza che al fine del minuto primo ha preso il carattere d' istantanea. Rammentiamo inoltre che a tutti e singoli questi uguali spazioli uno ad uno nel medesimo ordine sono ad unirsi spazioli uguali a quelli che ci dà la serie degli spazioli percorsi in grazia dell' azione

dagli impulsi esercitata nei successivi istanti del primo minuto secondo, perchè prodotti dalla forza costante che agisce nel 2.° secondo in modo uguale a quello che ha agito nel 1.°

In simil modo si ragioni per rapporto agli spazioli percorsi nel 3.° secondo ec. Ed ecco nel sottoposto specchio la genetica traccia di questi spazi prodotti dalle distinte due forze, quella cioè relativa alle unità di tempo percorse e quella relativa all' unità di tempo che scorre; la prima cioè che chiamammo forza *impressa*: la seconda che chiamammo forza *motrice* (§. 123).

Secondi	1	2	3
Istanti	1 , 2 , 3 , 4 .	5 , 6 , 7 , 8 .	9 , 10 , 11 , 12 . 13
Spazioli	0 , 1 , 2 , 3	4 , 4 , 4 , 4 ,	4
		0 , 1 , 2 , 3 ,	4
		4 , 5 , 6 , 7	8 , 8 , 8 , 8 , 8
			0 , 1 , 2 , 3 , 4
			8 , 9 , 10 , 11 , 12

(N) ÷ $0+1+2+3$. $4+5+6+7$. $8+9+10+11$

(O) ÷ $0+1+2+3+4$. $5+6+7+8$. $9+10+11+12$

La (N) è la serie degli spazioli descritti in ciascuno dei tre secondi.

La (O) esprime la serie degli spazioli descritti in grazia dell' azione dagli impulsi esercitata in ciascuno dei tre secondi.

152. E se vogliamo ora la precisa serie dei termini che descrivere dovrebbe un mobile in modo che $^g/_2$ fosse la somma dei primi t termini, che 0 ne fosse il 1.° e $^g/_t$ l' ultimo, avendo già notato (§. 148) essere allora necessario che nel 1.° istante d' ogni secondo venga ripetuto il medesimo spaziolo che è stato descritto nell' ultimo istante dell' antecedente, ecco evidentemente espresse nel seguente quadro le traccie della sua costituzione

Secondi	1		2		3
Istanti	1 , 2 , 3 , 4	,	5 , 6 , 7 , 8	,	9 , 10 , 11 , 12
Spazioli	0 , 1 , 2 , 3	,	3 , 3 , 3 , 3		
			0 , 1 , 2 , 3		
			3 , 4 , 5 , 6	,	6 , 6 , 6 , 6
					0 , 1 , 2 , 3
					6 , 7 , 8 , 9

(P) ÷ 0+1+2+3 . 3+4+5+6 . 6+7+8+9

La (P) è dunque la serie degli spazioli che il mobile percorrere dovrebbe a tenore della esposta ipotesi.

153. E le descritte serie osservando, notiamo, che considerandole sciolte nei primitivi loro termini.

La (N) è la progressione dei numeri naturali, avente suo principio dallo zero.

La (O), se si faccia astrazione dallo zero, è la progressione dei numeri naturali cominciante da 1 e dello stesso numero di termini della (N), giacchè se in essa viene trascurato il 1.° termine 0, sicchè sarebbe per questo motivo di un termine di meno della (N), viene anche considerato in essa quell' ultimo termine espresso dal 12 che in (N) non esiste; e quando la (O) viene così concepita, ognuno vede che la somma di queste due progressioni (N) ed (O) dà la progressione degli impari, quando prendasi $^1/_2$ per unità.

La (P) poi è una serie che rapporto ai primitivi suoi termini non è progressione, perchè lo spaziolo dell' ultimo istante di ciascun secondo è ripetuto nel 1.° del susseguente.

154. Volendo con segni algebrici esprimere le due serie (N) ed (O), compendiosamente esponendo la somma degli spazî percorsi in ciascun secondo, rammentiamo primieramente che giusta la teorica delle progressioni per differenza, le somme dei primi t termini, dei secondi t termini ec. di una progressione la cui differenza sia d, formano altra progressione pur esse la cui differenza è dt^2 (Vedi i miei elementi d'Algebra 3.^{a} Edizione §. 863) : e poichè nelle due

progressioni (N) ed (O) la differenza d, siccome abbiamo osservato (§.131) è $g/_{tt}$ così la differenza della nuova progressione formata dalle somme indicate sarà $g/_{tt} \times t^2 = g$. Rammentiamo inoltre che il 1.º termine di questa ottenuta nuova progressione, essendo la somma dei primi t termini ossia degli spazioli percorsi nel 1.º secondo, è $g/_2 - g/_{2t} = gt - g/_{2t}$ (§.133). Avendo poi così ottenuto l'espressione della differenza e del primo termine, è ben chiaro che se a questo 1.º termine della nuova progressione aggiungeremo una, due, tre ... volte la differenza trovata, formeremo il secondo, il terzo, il quarto ... termine della nuova progressione, cosicchè chiamando T il numero dei secondi, e perciò il numero dei termini della nuova progressione, la sua somma sarà espressa da

$$(Q) \div S = \frac{gt-g}{2t} + \frac{gt-g}{2t} + g + \frac{gt-g}{2t} + 2g + \ldots$$

$$+ \frac{gt-g}{2t} + (T-1)g = \left(\frac{gt-g}{t} + (T-1)g\right)\frac{T}{2}$$

$$= \frac{gT^2}{2} - \frac{gT}{2t}$$

Quindi nella (O), essendo $gt+g/_{2t}$ la somma dei primi t termini (§. 133) ne segue che la sua somma sia perciò espressa da

$$(R) \div S = \frac{gt+g}{2t} + \frac{gt+g}{2t} + g + \frac{gt+g}{2t} + 2g$$

$$+ \ldots + \frac{gt+g}{2t} + (T-1)g = \left(\frac{gt+g}{t} + (T-1)g\right)\frac{T}{2}$$

$$= \frac{gT^2}{2} + \frac{gT}{2t}$$

E la media di queste due somme (Q) ed (R) è $g/_2 T^2$, quantità che egualmente risulta, prendendo la somma dei termini d'una progressione, ciascun termine della quale è

formato dalla semisomma dei due corrispondenti della (Q) e della (R).

155. Volendo algebricamente esprimere pur anche la serie (P), non possiamo servirci dell' espediente stesso che abbiamo ora praticato, poichè mentre ciascuna parzial somma costituente un termine della serie (P) è una progressione, ed è anche un termine d' altra progressione, non si verifica in (P) come in (N) ed in (O) che tutti i dodici termini isolatamente considerati costituiscano una progressione pur essi (§. 153), sicchè siavi una differenza costante d che possa moltiplicarsi per t^2, ad oggetto di produrre la differenza costante della nuova progressione. Sapendosi però che la prima somma $0+1+2+3$ della (P) è uguale a $g/_2$, rilevandosi (§.152) dal quadro che ci espone la genesi della (P) che la seconda somma è $\frac{g}{2}+g=\frac{3g}{2}$, la terza è $\frac{g}{2}+2g=\frac{5g}{2}\ldots$ e che la *Tiesima* è $\frac{g}{2}+(T-1)g$ $=\frac{(2T-1)g}{2}$, ne segue che la somma della (P) sia espressa da

$$(A)\div S=\frac{g}{2}+\frac{3g}{2}+\frac{5g}{2}+\ldots+\frac{(2T-1)g}{2}$$

$$\text{donde } S=\left(\frac{g}{2}+\frac{(2T-1)g}{2}\right)\frac{T}{2}=\frac{gT^2}{2}$$

risultato che è uguale alla media delle due somme delle progressioni (Q) ed (R).

156. Dall' esposto intanto apparisce che la sola progressione fittizia (P) che si è convertita in (A) e non già la (N) e la (O) che si sono convertite in (Q) ed in (R) ha i suoi termini che sono nella progressione degli impari, perchè essa sola ha la differenza costante g doppia del 1.° termine $g/_2$ della serie, questa essendo la condizione essenziale af

finchè i termini di una progressione formino la serie dei numeri impari, quando il primo termine si faccia uguale ad 1. E con ciò abbiamo dunque dimostrato che *a rigore* nella serie degli impari non stanno nè gli spazi percorsi in un dato numero T di secondi espresso dalla (N) nè gli spazi percorsi per l' azione dagli impulsi esercitata durante il numero T di secondi espressi dalla (O), lo che falsamente si supponeva, e costituiva l' oggetto della difficoltà affacciata al §. 144.

157. E questa verità risulta pure, se a tenore dell' esempio ivi esposto si faccia $t = 4$, $T = 3$, $g = 1$. In fatti viene allora la (Q) convertita in (B) e la (R) convertita in (C); e l' (A) convertita in (D).

$$\text{(B)} \ldots S = {}^3/_8 + {}^3/_8 + 1 + {}^3/_8 + 2 = 4 + {}^1/_8$$
$$\text{(C)} \ldots S = {}^5/_8 + {}^5/_8 + 1 + {}^5/_8 + 2 = 4 + {}^7/_8$$
$$\text{(D)} \ldots S = {}^1/_2 + {}^3/_2 + {}^5/_2 = 4 + {}^1/_2$$

e (R) e (C) ci addimostrano che la media delle loro somme è $4 + {}^1/_2$, siccome $4 + {}^1/_2$ è la somma della (D) e i soli termini della (D) sono tra loro nella serie degli impari.

158. Lo stesso intento otteniamo se invece di esprimere lo spazio totale per mezzo degli spazi percorsi nei successivi secondi, lo esprimiamo per mezzo degli spazioli percorsi nei tempuscoli costituenti i dati secondi. Essendo in fatti lo spaziolo descritto nel 1.° tempuscolo del 1.° minuto secondo ${}^g/_{tt}$ ossia ${}^1/_{16}$, avremo

Invece della (N) al §. 151 indicante lo spazio percorso in tre minuti secondi, esprimendo la somma della progressione costituita da tutti e singoli i distinti 12 termini

$$S = 0 + {}^1/_{16} + {}^2/_{16} + {}^3/_{16} + {}^4/_{16} + {}^5/_{16} + {}^6/_{16} + {}^7/_{16}$$
$$+ {}^8/_{16} + {}^9/_{16} + {}^{10}/_{16} + {}^{11}/_{16} = (0 + {}^{11}/_{16})\, {}^{12}/_2 = 4 + {}^1/_8$$

ovvero, facendo la somma dei tre termini costituiti dalle parziali tre somme,

$$S = {}^6/_{15} + {}^{22}/_{16} + {}^{38}/_{16} = ({}^6/_{16} + {}^{38}/_{16})\, {}^3/_2 = 4 + {}^1/_8$$

In simil modo in vece della (O) esprimente gli spazi percorsi per l'azione dagli impulsi esercitata durante i tre minuti secondi,

$$S = 0 + {}^1/_{16} + {}^2/_{16} + {}^3/_{16} + {}^4/_{16} \quad + {}^5/_{16} + {}^6/_{16} + {}^7/_{16} + {}^8/_{16}$$
$$+ {}^9/_{16} + {}^{10}/_{16} + {}^{11}/_{16} + {}^{12}/_{16} = (0 + {}^{12}/_{16})^{13}/_2 = 4 + {}^7/_8$$

ovvero

$$S = {}^{10}/_{16} + {}^{26}/_{16} + {}^{42}/_{16} = ({}^{10}/_{16} + {}^{42}/_{16})^3/_2 = 4 + {}^7/_8.$$

E da queste espressioni chiaro risulta che la media di queste due somme ora ottenute $4 + {}^1/_8$ e $4 + {}^7/_8$ è $4 + {}^1/_2$; e che le somme parziali ${}^6/_{16}$, ${}^{22}/_{16}$, ${}^{18}/_{16}$ della prima progressione e ${}^{10}/_{16}$, ${}^{26}/_{16}$, ${}^{42}/_{16}$ della seconda non stanno affatto tra loro nella serie degli impari.

159. Lo spaziolo poi che nella progressione (P) al §. 152. si suppone descritto nel 1.º tempuscolo del 1.º minuto secondo essendo ${}^g/_{t(t-1)}$ ossia ${}^1/_{12}$ nel nostro esempio, in cui $t = 4$, ne segue che in vece della (P) avremo

$$S = 0 + {}^1/_{12} + {}^2/_{12} + {}^3/_{12} \quad + {}^3/_{12} + {}^4/_{12} + {}^5/_{12} + {}^6/_{12}$$
$$+ {}^6/_{12} + {}^7/_{12} + {}^8/_{12} + {}^9/_{12} \text{ (a)},$$

ovvero facendo le parziali somme, avremo

$$\text{(E)} \div S = {}^6/_{12} + {}^{18}/_{12} + {}^{30}/_{12} = ({}^6/_{12} + {}^{30}/_{12})^3/_2 = 4 + {}^1/_2$$

ed è ben chiaro che fatto $1 = {}^6/_{12}$, e sostituito nella formola (E), essa si converte nella serie de' numeri impari 1.3.5.

160. Nè gli spazi dunque successivamente descritti nel dato numero di secondi, nè quelli descritti in grazia dell' azione dagli impulsi esercitata durante il dato numero di secondi, stanno a rigore nella serie degli impari, ma vi sta la progressione, la cui somma è la media di quelle.

Ella è poi facil cosa l' accorgersi che se la differenza fra

(a) Di questa serie non può ottenersi la somma come delle due antecedenti con la formola delle progressioni, perchè la serie dei parziali termini non è una progressione, ben però può ottenersi dopo che l'avremo ridotta in (E) a progressione i cui termini sono le somme degli spazi percorsi nei successivi secondi.

la prima e la seconda somma degli spazi (§. 157) è di $^3/_4$, quantità ben valutabile, ciò deriva dall'aver noi per brevità di calcolo fatto eguale ad un piccolo numero qual'è 4 quel numero t che esser debbe maggiore di ogni assegnabile; posta la qual condizione la differenza va a rendersi insensibile, motivo per cui può ben asserirsi, senza tema di commettere un errore apprezzabile dall'osservazione e dalla sperienza, che gli spazi percorsi con moto uniformemente accelerato nei successivi secondi sieno nella serie degli impari.

161. Dopo le fatte osservazioni però conviene che conchiudiamo che lo studio delle leggi del moto accelerato ci ha portato a conoscere (§. 146) che a rigore un mobile affinchè nel 1.° minuto secondo descrivesse $^g/_2$ e quindi nei successivi secondi descrivesse spazi che fossero nella serie degl' impari, d' uopo sarebbe che l' azione della forza sospesa rimanesse ad eguali intervalli per un solo attimo, e precisamente nell'ultimo istante di ciascun secondo, cosicchè lo spaziolo descritto nel 1.° istante di ogni secondo fosse eguale a quello percorso nell' ultimo dell' antecedente. E dire ciò è un dire che in una serie, affinchè le successive somme di un dato numero t dei suoi termini i quali vi procedono nell' ordine naturale, stieno fra loro come i numeri impari, è necessario che l' ultimo termine di ciascuna somma sia eguale al primo della seguente.

162. Ma se tutte le serie in cui le successive somme parziali di un dato numero t di termini sono tante progressioni di numeri naturali che stanno tra loro come i numeri impari, fa d' uopo che abbiano l' ultimo termine di ciascuna somma eguale al primo della seguente, è poi vera anche la proposizione inversa? Questa ricerca era ben naturale che mi venisse in pensiero: la coltivai, e non mi fù difficile il darne la generale algebrica dimostrazione.

Ecco dunque una proprietà dei numeri a scuoprire e di-

mostrare la quale, io sono stato condotto dall' esame, su cui sono ora tornato delle leggi del moto accelerato.

« *In ogni serie cominciante da zero ed avente le parziali successive somme dei suoi primi* t *termini, de' suoi secondi* t *termini ec. procedenti nell' ordine naturale, ma però in tal modo disposti che l' ultimo termine di ciascuna sia uguale al primo della seguente, queste somme formano una progressione per differenza, i cui termini stanno tra di loro come i numeri impari* ». Eccone degli esempi su cui è bene verificare la enunciata proprietà prima di passare alla dimostrazione.

$0+1 \;.\; 1+2 \;.\; 2+3 \;.\; 3+4 \;.\; 4+5 \;.\; 5+6 \;.\;.\;.$

$0+1+2 \;.\; 2+3+4 \;.\; 4+5+6 \;.\; 6+7+8 \;.\;.\;.$

$0+1+2+3 \;.\; 3+4+5+6 \;.\; 6+7+8+9 \;.\;.\;.$

163. Questa proprietà dei numeri suppongo che certamente sarà dimostrata nelle eccellenti opere di Gauss e di Legendre, che io non conosco: ma persuaso che voi amiate sapere quale sia la dimostrazione che mi è corsa al pensiero, eccovela.

La somma di qualunque numero t di termini della serie dei naturali, somma che costituisce il primo termine della nostra progressione è $(0+t-1)\,\frac{t}{2} = \frac{t^2-t}{2}$

La differenza costante nella progressione formata dalle somme dei primi t termini dei secondi t termini ec. d'una progressione qualunque è dt^2; ed è perciò t^2 nella progressione dei numeri naturali perchè in essa $d = 1$. Ora il primo termine della seconda somma nel nostro caso non è quello che segue l' ultimo della prima, come avviene nella serie dei numeri naturali, ma è lo stesso ultimo della prima: lo che importa che ciascun termine della seconda somma differisca d' una unità in meno da quello che sarebbe, se non avesse avuto luogo questa ripetizione, e quindi tutta la seconda somma differisce di t in meno di quello che vi

avrebbe differito, se avesse appartenuto alla vera serie dei numeri naturali; e così pure per la stessa ragione la 3.ª somma differisce di t in meno dalla 2.ª, la 4.ª dalla 3.ª ec. Perciò la differenza costante fra le successive somme di questi termini invece di essere t^2, sarà t^2-t. Quindi formando i termini della progressione di queste somme col servirci del primo termine $\frac{t^2-t}{2}$ e della differenza t^2-t, in vece della progressione particolare p. es.

$0+1+2+3+4 \; . \; 4+5+6+7+8 \; . \; 8+9+10+11+12 \; . \; . \; .$

avremo la formola generica

$$\frac{t^2-t}{2} \; . \; \frac{t^2-t}{2}+t^2-t \; . \; \frac{t^2-t}{2}+2(t^2-t) \; . \; . \; .$$

$$. \; . \; . \; \frac{t^2-t}{2}+(n-1)\,(t^2-t)$$

ovvero riducendo, avremo

$$\frac{t^2-t}{2} \; . \; \frac{3(t^2-t)}{2} \; . \; \frac{5(t^2-t)}{2} \; . \; . \; . \; \frac{(2n-1)\,(t^2-t)}{2}$$

e fatto $\frac{t^2-t}{2}=1$

avremo la serie dei numeri impari 1, 3, 5 che è ciò che si dovea dimostrare.

.164. Con questa digressione, di cui chieggovi scusa, io credo di avere ben dileguate le difficoltà sulle leggi del moto uniformemente accelerato che mi si erano affacciate alla mente: e di essere giunto ad una verità che io credo nuova per voi, siccome la è stata per me, che cioè *una forza acceleratrice perchè potesse a rigore far percorrere al mobile dei successivi spazi che fossero nella serie degli impari, d'uopo sarebbe che fosse non assolutamente* COSTANTE, ma INTERMITTENTE, *cessasse cioè dalla continua sua azione in ogni ultimo istante solamente di ciascuna unità di tempo* (§ 161).

Compiuta questa digressione, mi attengo alla data parola di esporre cioè qualche giustificazione relativa alla dimostrazione or da me esposta, la quale a me sembra più esatta e più naturale di quella analitica data dalla comune dei Fisici, in cui viene trascurata la g.

Per facilitare agli Allievi l' apprendimento delle esposte leggi, a me sembra che molto giovi distinguere, siccome ho fatto, la somma s degli spazioli relativi al numero t dei successivi tempuscoli costituenti l' unità di misura del tempo che nel nostro caso è il secondo, dalla S degli spazi relativi al numero T di secondi. La formola $s = {}^{g}/_{2}$ parmi elemento indispensibile onde ottenere l' altra $S = {}^{g}/_{2}T^2$.

165. La comune dei Fisici per amor di brevità fa tutte discendere le esposte leggi da una progressione sola, cioè dalla $s = g+2g+3g \ldots +tg$. In questa, essi dicono, $s = (g+tg)\,{}^{t}/_{2}$. Ma g è quantità trascurabile: dunque $s = {}^{g}/_{2}t^2$. E posta questa equazione, tutte le altre comprovanti le altre leggi, vi discendono con la massima facilità — Che brevità sorprendente! mi replicano i miei oppositori. Che densa oscurità! Mi ripetono gli Allievi. Che si ottenga $s = {}^{g}/_{2}t^2$ quando g sia minore e t maggiore di ogni assegnabile, quando si tratta cioè di spazioli e tempuscoli infinitesimi, sta bene, ma quando g sia uno spazio apprezzabile, e si tratti non di t, ma di T, si tratti cioè di un numero determinato non di istanti, ma di ben note misure di tempo, siccome è un secondo, che è il caso appunto che dobbiamo prendere in principale considerazione, egli è verissimo che le velocità al fine dei successivi secondi sieno espresse dalla serie g . $2g$ . . $3g \ldots Tg$, ma è falsissimo che lo sieno gli spazi già percorsi nei successivi secondi. Commesso però questo errore che porta ad un risultato in più, egli è giuoco-forza affibiarne agli Allievi un altro che dia un risultato in meno; e tale è l'assertiva che g sia quantità trascurabile. Con ciò hanno essi

ottenuto un compenso esattissimo. Ed in vero dovevano porre, come noi abbiamo dimostrato

(F) $S = g/_2 + 3g/_2 + 5g/_2 + \ldots\ldots + (2T-1)g/_2$

ed in vece hanno essi posto la formola che abbiamo dimostrata erronea

(G) . . .. $S = g+2g+3g+ \ldots\ldots + Tg$

Ebbene a questo primo errore commesso essi porgono riparo commettendone un' altro, quale si è quello di credere trascurabile e quindi di togliere perchè creduto tale, il termine $gt/_2$. Ma questo è trascurabile nell' unico caso in cui g sia spazio corrispondente a un tempuscolo infinitesimo, e non già quando si riferisca, come lo si suole comunemente ad una unità di tempo, p. e. ad un secondo, caso ben diverso dal primo a cui fanno senza le debite avvertenze passaggio. Si toglie dunque g non perchè sia (nel caso che si riferisca ad unità di tempo) quantità trascurabile, ma si toglie per dar compenso ad un errore ben sensibile già commesso in più, compenso che non potrebbesi anzi avere dalla sottrazione di g, se g fosse piccolissima, e perciò ommissibile quantità. Togliendo infatti $g/_2 T$ ossia $g/_2$ ripetuto T volte, ossia $g/_2$ per ogni termine della progressione, ne segue che la progressione (G) diventa la (F) ossia ciò che debb' essere — E se dunque anche così si ottiene l' intento, e che temete che vi si possa dir contro? — Null'altro che qualche scolaretto uscito di fresco dalle lezioni di Logica vi dica col frasario di scuola: la vostra proposizione è *materialmente vera*, ma ha il pregevole requisito di essere *formalmente falsa*, giacchè a questo vero non possiamo giungere senza passare attraverso a due supposizioni che sono erronee quando trattasi di unità di tempo, e non di tempuscoli.

166. In secondo luogo poi è anche a notarsi che la pratica di trascurare le quantità nel calcolo perchè infinitesime, non è gradita allo spirito degli allievi iguari dei prin-

cipi del calcolo infinitesimale; e d' altronde ricorrere a questo per la spiegazione dei primi elementi delle scienze, sarebbe un lusso di calcolo atto a spargere più imbarazzo che luce nell'acquisto delle nozioni elementari delle scienze fisiche.

Dimostrando senza uso di calcolo infinitesimale, io mi sono creduto in debito di non trascurare quantità di sorta nei risultati del calcolo, appigliandomi invece al partito di sciegliere i risultati medi cui sono applicabili le sperienze. Forte del principio ideologico che distingue l' istante dell' azione da quello dell' effetto, io ho posto zero nel 1.° termine della progressione esprimente gli spazioli percorsi, perchè a quell' istante non corrisponde spazio di sorta: e l'Allievo rimane più soddisfatto di questo modo di procedere che di quello comunemente usato di porre per primo termine una quantità quand' anche infinitesima e poi toglierla perchè trascurabile.

167. La mia dimostrazione inoltre a me sembra che fluisca con ordine più naturale di quello che le altre presentano. Essa sdrucciola senza intoppi (permettetemi questa troppo materiale espressione) nell' intelletto degli Allievi. Non sembra a voi, caro Amico, esser cosa più naturale il parlare, siccome ho io fatto, prima delle proprietà che hanno le parti, e delle leggi della loro generazione, e poscia passare di queste parti a fare la somma e quindi di questa somma a mostrare le proprietà, piuttosto che parlar prima della somma e sue proprietà, e poi da questa dedurre le proprietà delle parti e la legge della loro formazione? Eppure questa è la tattica di tutti i fisici. Vi dimostrano essi prima che le somme degli spazi sono come i quadrati dei tempi, che possono perciò da questi essere espresse, e poi dal 2.° quadrato togliendo il 1.°, dal 3.° il 2.° ec. vi addimostrano che le parti sulle cui somme vi hanno prima trattenuto sono nella serie dei numeri impari. Con questo

procedimento a dir vero un poco retrogrado, se ben si accorda il precetto *quidquid praecipies esto brevis*, non si accorda certo quel *lucidus ordo* tanto desiderabile ed influente nella comunicativa de' nostri pensieri.

168. Ma dell'aja triangolare di Galileo *nec verbum quidem*? Non sarebbe questo un dispregio alla somma autorità di quel genio? — L'autorità, ho avuto altra volta motivo di significarvelo, ha per me ragguardevole peso: somma è poi quella del gran precursore di Newton. E la stima e la gratitudine che io gli professo per i suoi grandi trovati fuse insieme formano un misto affetto che poco meno che culto voi chiamereste. E chi non lo si sente vivo destarsi nell'animo e a palpito di venerazione muovere il cuore, allorchè ai nostri sguardi p. es. si offra quella lampada antica alla volta sospesa del gran tempio della Toscana Atene, che sublimi nozioni suscitò nella mente del gran Pisano? Chi havvi fra gli Amatori delle fisiche scienze che con sommo trasporto quella lampada non ammiri che destò in Galileo l'idea delle più belle proprietà del pendolo, le quali servir dovevano di base a tante dimostrazioni ed a quella fra le altre del diurno moto della terra, dimostrazione che dalle applicazioni del pendolo ricevette in seguito le più valide prove? Si quegli oggetti sensibili stessi che furono un giorno a contatto con i geni della scienza, sono per noi preziosi monumenti alla vista dei quali par che riceva ispirazione il nostro intelletto, allorchè la rapida associazione delle idee dai materiali oggetti vola alle nozioni di quelle celebri scoperte che per mezzo di essi ebbero vita. Si quegli oggetti sono sacre reliquie, che noi veneriamo nel santuario delle scienze a testimonianza non dubbia della nostra affettuosa ed altissima stima verso i grandi ai quali appartennero. E questo vivo e giusto affetto io ben sento, e di sentire mi glorio. Ma forse perchè l'oscillare di una lampada dette occasione alle meditazioni di Galileo intorno

al pendolo, giusta credereste voi la pretensione di coloro i quali si ostinassero a volere che il peso, di cui debbe essere dotato questo strumento alla sua estremità, avesse la effigie e la forma di un piccolo lampadino, fosse anzi precisamente la Pisana lampade in miniatura? Questo sarebbe uno spingere le cose agli estremi.

« *Est modus in rebus, sunt certi denique fines,*
Quos ultra citraque nequit consistere rectum. »

E nelle scienze pur anche non va il culto convertito in farisaica superstizione. Ebbene: una risposta consimile io dò pure a coloro i quali la pretensione ci manifestano di onninamente volere l'aja triangolare nelle dimostrazioni del moto uniformemente accelerato.

169. Se voi vi fate a meditare per entro alla storia delle grandi scoperte, voi vi avvedrete, o egregio amico, che meritano di essere in due classi distinte. Alcune di esse sono tali che fin dal loro apparire nella mente dei geni creatori, limpidissime e chiare si schierarono innanzi al loro intelletto, sicchè essi ne dettero tosto le più dirette e facili dimostrazioni. E queste sono appunto quelle scoperte che per sentito rispetto verso gli Autori vanno agli Allievi proposte siccome ce le communicarono. In questi casi seguire le orme dei grandi, copiare anche *ad litteram* le loro parole, e rinunciare così alla soddisfazione di dire cose proprie per far spiccare nella loro originalità e semplicità i pensieri stessi dell'Inventore con cui certe solenni verità furono dimostrate, torna all'utile, al decoro dell'insegnamento, e si faccia. E così p. es. io mi sono condotto nei miei elementi di Geometria per rapporto al teorema di Pittagora, e per rapporto alla rettificazione della periferia scoperta da Archimede.

Altre verità poi fra i veli e le ombre, quasi come un lampo che subito dileguossi, si affacciarono alla mente di celebri Pensatori. Ed essi seppero ben profittare pur'anche

di questa luce momentanea per tutte veder d'un attimo al suo chiarore le moltiplici ed utili conseguenze che tosto passarono ad afferrare ed a sviluppare perchè non fuggissero loro di mente. E di queste occupandosi lasciarono l'idea primitiva senza molto tener dietro ai retti modi di dimostrarla agli altri nel suo vero aspetto, paghi di averle eglino soli in qualche modo compresa. Passarono in somma a dedicarsi totalmente ai rapporti che la verità scoperta aveva con altre, passarono a svilupparne i corollarj, senza porre grande importanza sulla esattezza della dimostrazione del primo principio che rimase tratteggiato appena e come in abbozzo. Così a Galileo è accaduto per rapporto al moto uniformemente accelerato. Ed in tali casi è debito di chi compila i corsi scientifici supplire e dar quel torno e quelle tinte che si conviene ai primi lineamenti che ha il genio a noi dato. Seguirlo nei suoi difetti, non allontanarsi nemmeno d'una linea dalle sue orme, questo può veramente dirsi col Venosino è uno *strisciare il suolo per timore di procella*. In tali circostanze io non ho mai dubitato delle mie facoltà; e mi sono sempre tenuto in diritto di variare l'andamento delle cose, disponendole nel modo che alla intelligenza mi è sembrato più utile. Così ho io qualche volta innovato; ma forte attenendomi sempre ai precetti del Poeta filosofo, di non lasciarmi cioè sedurre dal desiderio di porre il meraviglioso e quasi il prodigio nelle mie novità, io spero che Voi, caro amico, allorchè preso avete per testo dei vostri studi le didascaliche mie produzioni, per quanto e rozze e inesatte e incomplete esser possano, trovato non vi avrete poi certamente

Nelle selve il delfin, l'apro tra i flutti.

Poscritto

Nel rileggere questa lettera, o stimatissimo Amico, io mi accorgo con dispiacenza che vi sono occorsi alcuni errori

di stampa di qualche rilievo, malgrado la massima diligenza usata nel disimpegnare il penoso incarico della correzione. M' accorgo inoltre, come essendomi venuto il destro (nel leggere le prime stampe a correggersi della pag. 199) di modificare alcune espressioni che si riferivano ad una progressione sola in modo che si riferissero ad un tempo a due distinte, ed essendo stato obbligato a sospendere la correzione appena cominciata, siami per involontaria distrazione avvenuto, che nel tornar di nuovo a leggere le stampe, io l' abbia affatto dimenticata, sicchè è duopo aver per non fatte le piccole mutazioni, perchè non recate al loro termine.

Questi inconvenienti potrebbero togliersi con la ristampa di un foglio: ma poichè trattasi di piccole mende, io me ne astengo. Anzi piuttosto che coll'indicato mezzo nascondere l' accaduto, mi piace di notificarvelo per non lasciarmi sfuggire circostanza da suggerirvi avvertenze le quali valgono a sempre più cautelarvi, e porvi in guardia per non commettere errori. Fu questo infatti lo scopo primario pel quale voi m' invitaste a famigliari filosofiche conferenze. Si: l' accaduto vi faccia sempre più conoscere, quanto nostra mente sia talvolta soggetta a potenti distrazioni, che la fanno cadere in inesattezze, malgrado l' impegno assunto di star concentrata nelle sue idee; e quanto perciò sia utile cosa il formarsi una legge di non permettere giammai, che le mutazioni anche le più leggiere fatte nel manoscritto vadano alla stampa senza essere state bene cribrate e sottoposte a severa disamina qualche giorno dopo che si sieno in carta vergate. Se avessi scrupolosamente osservato questo precetto, io non proverei ora il dispiacere di aver commesso le indicate inavvertenze.

Ma quando il male è accaduto, è d' uopo pensare al rimedio. Quindi ad oggetto che gli occorsi errori non abbiano a servire d' inciampo alla intelligenza delle materie, piuttosto che aspettare di notarli, siccome suole praticarsi, in un elenco di errori e correzioni in fine dell' operetta,

io mi credo in debito di notificarveli al momento. Interesso perciò la bontà vostra, o caro Amico e quella del benigno lettore ad avere la compiacenza di porre attenzione ai seguenti rimarchi.

Alla pag. 176 *lin.* 4 e 11 *leggasi non* ι *ma* T; *e alla pag.* 186 *lin.* 17 *non* 4°... istante, *ma* 4°... m. secondo.

Nella nona, decima e undecima linea della pagina 194 *vanno sostituite le seguenti parole* « Quindi facendo le som- « me parziali dei *primi* quattro termini, dei *secondi* quat- « tro termini, dei *terzi* quattro termini della prima serie, « e facendo le somme parziali dei *primi* quattro termini « significativi, dei *secondi* quattro termini, dei *terzi* quat- « tro termini della seconda, risulta » *Nella penultima li-* « *nea della stessa pagina alla* (T) *sostituiscasi* (I).

Nella pag. 196 *alla linea* 17ª *piuttosto che* « dunque la forza converrebbe » *debbe leggersi* « dunque la forza motrice in simil modo agendo nei successivi secondi, converrebbe » *E alla linea* 29 *in vece di* « e nella differenza *d* » *debbe leggersi* « o nella differenza *d* »

Nella pag. 197 *al fine della linea* 17ª *invece di* » $= {}^{3}/_{12} \times {}^{4}/_{2}$ » *debbe leggersi* « $= {}^{3}/_{12} \times {}^{4}/_{2} = {}^{1}/_{2}$ »

Nella pag. 199 *alla linea* 27ª, *ossia alla linea prima del* §. 154 *in vece delle parole* « le due serie (N) ed (O) « *debbe leggersi* la serie (N) » *Ed in fine della pagina stessa e al principio della seguente*, *ove leggesi* « e poichè nelle due progressioni (N) e (O) » *legger si debbe in vece* « e poichè nella progressione (N) »

Nella pagina 201 *le linee* 13ª *e seguenti si leggano così* « (§.152) che la prima somma $0+1+2+3$ della (P) è uguale a ${}^{6}/_{2}$; e rilevandosi (§.152) dal quadro che ci espone la genesi della (P) e da quanto si è esposto al §. 137 e 138 che .... »

Alla pagina 204 *nella linea* 13ª *in vece, del* (§. 146) *si legga* (§. 146 al 148).

LETTERA VIII.ª

SULL' ACCORDO DELLE NOZIONI DATE INTORNO ALLA MOLTIPLICA E ALLA DIVISIONE COLLE TEORICHE DELLA GEOMETRIA, PER LE QUALI DATE LE LINEE SI OTTENGONO LE SUPERFICIE E I VOLUMI E VICEVERSA.

ARGOMENTO

Nei problemi in cui cercasi un' aja non è una data linea che si moltiplichi, ma è un rettangolo, che per geometrica speculazione viene da una linea dedotto. E' desso (e non è già una retta) che ripetuto dà la superficie cercata (170 al 177) — Ciò si verifica anche quando le linee sieno espresse da frazioni spurie o vere (178 al 184) — Nei problemi in cui data l' aja e una linea, si cerca una linea, il quoto che si ottiene è non una linea ma una superficie: e dalla superficie per speculazione geometrica si ottiene la linea richiesta (186) — Questi sono i riflessi che spiegano l' andamento che tiene la mente nel giungere ai detti risultati e non già il ridurle con Newton ad astratte *quiddità* (187) — Da questo inefficace espediente derivano e il chiedere come avvenga che il prodotto di linea per linea ora sia una linea, ed ora sia una superficie, siccome propone Lecchi (188) ed altre difficoltà che insorgono negli Allievi. Io le ho notate; e ne ho anche indagato ed espresso le cause, i difetti cioè dell' insegnamento, da cui esse procedono (189 al 194) — Da ciò conchiudo che se stà bene far uso per amore di laconismo di espressioni inesatte relative ai geometrici processi diretti ad ottenere le superficie e i volumi, sta bene ancora, che prima di farne uso si rettifichino le idee con gli esposti schiarimenti (195 al 196).

---

170. Un' altra lettera ancora a giustificazione delle mie innovazioni introdotte nelle teoriche della moltiplica e della divisione; e poi l' Aritmetica abbandonando, passerò a dimostrarvi le inesattezze anche più gravi che commettere si sogliono nei comuni metodi dell' insegnamento dell' Algebra.

Come armonizzino con i miei principi varie teorie della Fisica, che sembrano dissonanti, io vi ho dati alcuni esempi per dimostrarvelo; e sulle traccie di quelli vi sarà ben facile l' armonia costatare di altre pur anche, che fossero apparentemente contrarie. Come vi armonizzino anche le teorie della Geometria, permettemi che io passi ora ad appalesarvi; e poi *punto e basta* su questo rapporto. Se nuove difficoltà insorgessero, la tattica tenuta per le esposte obbiezioni vi servirà di norma per abbattere le altre.

171. Non trascuro questo interessante argomento dei geometrici quesiti relativi alla misura delle superficie e dei volumi, perchè preveggo certe obbiezioni le quali per molti non sarà cosa inutile il dileguare — Se le teorie del moto uniforme e uniformemente accelerato tu le accordi, già sento ripetermi, alle pretese tue leggi e criteri, non potrai di certo accomodarvi quelle relative alla misura delle superficie e dei volumi. Andrà bene che nell' aja triangolare delle velocità noi ravvisare non dobbiamo che una semplice linea ripiegata: ma non sono davvero una semplice linea e le superficie dei terreni e i volumi delle muraglie che si misurano: e per misurarli tu vedi che niun Agrimensore si trascina dietro con sè una tavola lunga e larga metri dieci per applicarla sulla superficie del terreno, allorchè ti dice che dessa p. es. è mille ari, nè che un Architetto con sè trasporti un gran dado lungo, largo ed alto un metro per misurare la capacità di un pozzo, allorchè ti dice che desso contiene mille steri. E l' uno e l' altro con un semplice nastro o catena misurano la dimensione di alcune linee del terreno e del pozzo; e quindi moltiplicando tra loro i numeri delle ottenute misure lineari, ottengono per prodotto o la superficie o il volume che ricercavano; ed ecco all' aria e a soqquadro le fandonie tutte che ci volevi dare ad intendere, e che andavi spacciando per leggi e criterj. Tali sono per un esempio che i *due fattori della moltiplica*

deggiono essere sempre eterogenei , mentre nel caso nostro entrambi i fattori non sono che linee ; ovvero che il *moltiplicando ed il prodotto debbono essere sempre omogenei* , mentre , essendo linea il moltiplicando e superficie il prodotto , chiaramente apparisce che sono eterogenei .

Troppo a buon mercato tu prodighi nella scienza nuove leggi e nuovi criteri o meschinissimo riformatore. Se tu avessi avuta un poco meno di alterigia e di presunzione, te ne saresti astenuto. Usa perciò da quì innanzi ogni perspicacia, e procedi un poco più con i calzari di piombo, quando trattasi di stabilire delle massime. Per ciò che si verifica in alcuni casi , astienti o carissimo dal tosto dedurre la conseguenza che debba verificarsi per tutti,: non v' è cautela che basti nell' usare dell' argomento di analogia — Ed io : auree parole dettate da senno altissimo sono queste che mi ritornate alla mente . Gran peccato che sieno male applicate ! Sì: sono parole di senno altissimo che meritano di essere scolpite nell' animo, poichè se noi prendiamo a svolgere la storia dei sistemi che nelle scienze naturali si sono gli uni agli altri succeduti , noi vedremo che la maggior parte degli errori che in essi si sono sostenuti, sono quasi tutti derivati dalla smania di generalizzare e di applicare ai casi tutti del medesimo genere ciò che si è veduto verificare in alcuni soltanto, sono derivati perciò dall' aver trasgredito l' aureo indicato precetto. Peccato però, io ripeto, che voi senza averne il merito della invenzione abbiate poi il demerito della pessima applicazione, poichè l' aureo precetto non è riferibile che alle verità sperimentali , e non è applicabile in conto alcuno alle verità puramente speculative . E tali sono (non abbiate timore di ammetterlo) si, tali sono *che i due fattori della moltiplica esser debbono eterogenei* , *e che il prodotto esser debba omogeneo al moltiplicando.* Assoggettabili di fatto le troverete al

principio di contraddizione per poco che] vi facciate ad e-saminarle. Ed in vero quando si ripete un dato numero di volte una parte per ottenere un tutto, sarebbe un assurdo l' ammettere che il numero che esprimer debbe il *quante volte*, fosse non già dedotto (il che avviene nella massima parte dei problemi) da un numero concreto, ma fosse concreto ed omogeneo al moltiplicando, poichè ammettere *converrebbe* che esprimesse ad un tempo e *volte* e *cose*. Non può dunque darsi mai caso che i due fattori essere possano omogenei . Ed assurdo parimenti sarebbe che qualche volta il prodotto esser potesse eterogeneo al moltiplicando; per lo che duopo sarebbe che un numero fosse ad un tempo e non fosse l'assieme delle sue parti, lo fosse per poter essere il *prodotto*, non lo fosse per poter essere alle medesime eterogeneo .

172. E come va dunque che una superficie è il prodotto d' una linea moltiplicata per una linea ; ed un volume è il prodotto di una superficie moltiplicata per una linea? Come va che si ottiene per quoto una linea quando si divide una superficie per una linea , o un volume per una superficie ? In questi casi ecco i fattori omogenei, ecco il prodotto eterogeneo al moltiplicando — Che il prodotto, o Signori, di linea per linea sia una superficie : che un volume sia prodotto da una superficie per linea : che una linea sia il quoto d' una superficie divisa per una linea, d' un volume diviso per superficie , lo dite voi , ma non l' approvo già io — Noi lo diciamo dietro l' autorità di molti e molti dotti — Ed io ve lo disapprovo con l' autorità della ragione ; e vi fo poi inoltre sapere che i dotti hanno pensato bene, ma hanno la colpa di non essersi espressi con quella chiarezza che sarebbe stata necessaria per evitare quelle idee inesatte e forse anche erronee che voi avete in proposito . Ed io non so realmente occultarvi , che provo una consolante soddisfazione allorquando veggo che

ogni contradizione fra varie teoriche della Fisica e della Geometria da una parte e i criteri e le leggi da me stabiliti intorno alla moltiplica e alla divisione dall' altra, va a dissiparsi e svanire non appena che su quelle fisiche e geometriche cognizioni venga portata quella esattezza che loro conviene. Ella è questa in fatti l' impronta del vero la più convincente, che le stabilite massime ci offrono. *La verità*, dice benissimo Gozzi, *ha questo di buono*, che quando *si è cominciata a vederla*, *si può proseguire senz' altro avviso*, cosicchè applicata a mille altre cose con le quali abbia un rapporto e una connessione, vi dissipa le difficoltà e vi apporta luce e chiarezza. E così avviene di fatto intorno a quei problemi che in questa lettera mi sono proposto d' esaminare.

173. Da quelli io do tosto principio, nei quali date alcune linee, si propone la ricerca delle superficie. E facendomi ad osservare che un Geometra per aver l' aja d' un rettangolo p. es. avente la base di metri 6 e l' altezza di 80, moltiplica la base 6 per l' altezza 80, e conchiude che il prodotto 480 esprime il numero dei metri quadrati che costituiscono la sua superficie, mi fo tosto a riflettere che egli non ha già ottenuta la cosa che ricercava per mezzo d' una semplice moltiplicazione, come a primo aspetto si crederebbe, ma ha dovuto aggiungervi per ottenerla l' applicazione d' un teorema di Geometria che può quasi dirsi in altro non consistere che in una ispezione di figura. Il teorema è questo. Se dopo aver misurato con una unità lineare, p. es. col metro, base ed altezza d' un rettangolo, si tirino pei punti di divisione della base tante rette ad essa perpendicolari e tante rette perpendicolari all' altezza per i suoi punti di divisione, il rettangolo viene diviso in un numero di quadrati aventi per lato l' unità di misura, numero che è uguale alle unità lineari della base tante volte ripetute quante sono quelle dell' altezza. Infatti

ciascuna delle unità lineari costituenti la base è base d'un distinto quadrato; e perciò quante sono le unità lineari della base (6 nel caso nostro) e tanti sono i quadrati che costituiscono il rettangolo parziale costruito sulla base del rettangolo totale, avente per altezza l'unità lineare medesima. Inoltre tante sono le misure lineari dell'altezza, e tanti sono i parziali rettangoli tutti eguali a quello costruito sulla base perchè equi-basici ed equi-alti (80 nel nostro esempio). Ma il numero totale dei quadrati costituenti il rettangolo totale, non è che il numero dei quadrati costituenti un solo dei parziali rettangoli, (6 nel nostro caso) ripetuto per quanti sono essi rettangoli ossia 80 volte: dunque questo numero di metri quadrati è un prodotto uguale al prodotto di metri lineari che si avrebbe ripetendo le unità della base tante volte quante sono quelle dell'altezza. Richiamato alla memoria questo teorema, io vi fò rimarcare che il Geometra per conchiudere che l'aja del rettangolo è 480 metri quadrati, ha dovuto su di esso basare le sue deduzioni, e due sono le strade poco dissimili è vero, ma pur distinte che egli può battere per giungervi; e attesa l'importanza dell'argomento, il conoscere entrambe è util cosa.

174. Ecco la I.ª Moltiplicando le misure lineari della base che nel nostro caso nostro sono 6 m., pel numero delle unità dell'altezza, ossia per 80, ripetendo cioè 80 volte metri 6 lineari, è chiaro che il prodotto esprime un dato numero di misure lineari, è chiaro cioè che si ottengono 480 *metri lineari*, e non già 480 metri quadrati: ma l'esposto teorema ci fa conoscere che questo numero di metri quadrati che ricerchiamo è uguale al numero dei metri lineari ottenuti: dunque anche i metri quadrati costituenti l'aja del rettangolo sono 480.

Il numero 480 metri lineari dunque che realmente otteniamo ripetendo 80 volte la base metri 6 è una indicazione indiretta dei 480 metri quadrati che abbiamo trovato es-

sere i costituenti dell' aja del rettangolo. Questo prodotto 480 non potendo esprimere che quantità omogenee al moltiplicando, non esprime che linee, ed è una deduzione geometrica la conseguenza che a questo numero di linee sia uguale quello dei quadrati misuratori delle aje aventi per lato l' unità lineare.

175. La II.^{a} strada che il Geometra può battere per giungere al medesimo risultato, e che per essere a mio parere la più naturale è quella che io preferisco, è questa. Quando in grazia dell' esposto teorema si è veduto che il numero delle misure lineari della base è uguale al numero dei quadrati costituenti il parziale rettangolo avente per altezza l' unità lineare e costruito sulla base stessa, il più naturale procedimento di nostra mente si è che dessa piuttosto che concepire la ripetizione delle misure lineari della base come nell' altro metodo si è praticato, piuttostochè prendere la retta base per moltiplicando, e quindi ottenere per prodotto un numero di unità lineari a cui non ci chiama il bisogno, e poscia per mezzo della Geometrìa assicurarsi che a questo è uguale il numero dei quadrati che si cerca, prenda invece per moltiplicando non il numero delle misure lineari della base, ma il numero, che gli è uguale (§.173) dei quadrati costituenti il detto parziale rettangolo, e quindi tante volte ripetendolo quante sono le unità dell' altezza, ne ottenga la superficie cercata.

176. Ciò posto, ben si rileva, che il problema così enunciato « *Data la base d' un rettangolo, e sia metri* 6, *e datane l' altezza, e sia metri* 80, *si determini il numero dei metri quadrati che ne costituiscono la superficie* » egli è un problema che non presenta i caratteri che lo mostrino risolvibile per mezzo della moltiplicazione, ma dopo gli schiarimenti recati in proposito dal teorema di Geometria e dall' ispezione della figura, il problema può prendere quest' altro aspetto « *Dato che un rettangolo par-*

ziale risulti da un dato numero , e p. es. 6 , di quadrati: un determinato numero di questi rettangoli e p. es. 80 , quanti quadrati conterrà ? » Il quesito mostra così i caratteri tutti d' un problema di moltiplicazione , giacchè presenta 4 termini : Il 1.° di questi quattro è l' unità che è annessa al *rettangolo parziale :* il 2.° è l' eterogeneo corrispondente all' unità , cioè il numero dei quadrati costituenti il rettangolo parziale , costituenti cioè *la grandezza delle parti* che debbe essere ripetuta , cioè il moltiplicando che è *quadrati* 6 nel nostro esempio ; il 3.° è l' omogeneo all' unità da cui si deduce il *numero delle parti* ossia il moltiplicatore , ed è la quantità 80 , numero dei rettangoli parziali , la quale ci fa conoscere che dobbiamo ripetere 80 volte il moltiplicando quadrati 6 : il 4.° è l' omogeneo al moltiplicando ossia il prodotto che esprime il *tutto* ossia il rettangolo totale che si ottiene ripetendo nel nostro esempio ottanta volte il rettangolo parziale costituito dai 6 metri quadrati . Il problema ha dunque tutti i requisiti notati alla pag. 112 per poter essere risoluto per la moltiplicazione e vi si verificano tutti gli stabiliti criteri .

E se da ciò risulta che 480 metri quadrati otteniamo per l' aja del rettangolo totale perchè ripetiamo 80 volte 6 metri quadrati e non 6 metri lineari , nulla di meraviglioso e di strano può aver luogo in proposito .

177. A togliere dunque ogni difficoltà ogni qualvolta ci si offra il caso di superficie apparentemente ottenute per la moltiplicazione di linea per linea ; queste due sole avvertenze sono necessarie :

I.° Il numero delle misure lineari della base del rettangolo a misurarsi non è il moltiplicando , ma ci determina il moltiplicando . Esso in fatti (avvertitelo bene , poichè questa osservazione è la fiaccola che qui dirada tutte le tenebre) esso è un rettangolo che avendo per altezza la misura lineare e per base la base del rettangolo totale contie-

ne tanti quadrati aventi per lato l' unità lineare quante sono le unità della base.

II.° La linea altezza del rettangolo a misurarsi determina sempre col numero delle sue unità il moltiplicatore, ossia il *quante volte* va ripetuto il parziale rettangolo sopradetto per ottenere il prodotto.

Ecco i due riflessi, e non altro, che occorre avere presenti per bene intendere cosa significhi la laconica inesatta espressione di superficie ottenute per mezzo della moltiplicazione di linee per linee.

178. I ragionamenti e i riflessi sono consimili anche allorquando o la base, o l' altezza dei rettangoli, od entrambe sieno frazioni o spurie o vere: d' uopo è però condurre l' Allievo (non dimenticate questa avvertenza) con la figura sott' occhio all' esame dei casi enunciati; sicchè si avveda come anche in questi vi si applichino i canoni ora stabiliti, e si convinca come le giuste idee sulla teoria della moltiplicazione per frazioni trovino ad un tempo conferma, e dieno schiarimento alle applicazioni geometriche.

179. Sia p. es. la base di un rettangolo piedi $2+^2/_3$ e piedi 5 l' altezza. Dunque in seguito del canone stabilito il moltiplicando non è piedi lineari $2+^2/_3$, ma è il rettangolo parziale avente un piede di altezza e costruito sopra la base del rettangolo totale e perciò costituito da metri quadrati $2+^2/_3$. E poichè piedi 5 è l' altezza totale, 5 volte dunque, come per ispezione di figura si rileva, va ripetuto il parziale rettangolo piedi quadrati $2+^2/_3$ per ottenere l' aja totale, la quale è perciò $(2+^2/_3)5 = 13+^1/_3$ piedi quadrati.

180. Sia per es. la base d' altro rettangolo a misurarsi $^5/_{12}$ di piede; e 3 piedi ne sia l' altezza. In tal caso sulla figura che questo rettangolo rappresenta si prenda in considerazione quel rettangolo che ha per altezza la detta misura lineare cioè un piede, e per base la base del rettangolo totale che è $^5/_{12}$ di piede. Questo rettangolo parziale,

che giusta la massima stabilita (§ 177) noi consideriamo per moltiplicando, è ben chiaro che invece di contenere più piedi quadrati come nei casi antecedenti, è minore di un piede quadrato, e ne è soltanto i $^5/_{12}$, perchè avendone la stessa altezza, la base è soltanto $^5/_{12}$ della base del piede quadrato, e i rettangoli stanno come le basi quando sono equi-alti. Ma poichè l' altezza del rettangolo totale è 3 piedi, risulta per ispezione di figura che il rettangolo parziale $^5/_{12}$ di piede quadrato va ripetuto 3 volte per formare l' aja del rettangolo totale. Dunque quest' aja è data da $^5/_{12}\times 3 = 1+^1/_4$, è cioè un piede quadrato, più $^1/_4$ di piede quadrato.

181. Che se il rettangolo a misurarsi avente per base $^5/_{12}$ di piede avesse l'altezza non di piedi 3, come superiormente, ma invece per esempio di $^7/_{12}$ di piede, in tal caso è chiaro, che il rettangolo $^5/_{12}$ di piede quadrato, anzichè doversi ripetere tre volte, debbe essere reso minore per divenire il rettangolo di cui cerchiamo l' aja. Ed in vero questo rettangolo di cui cercasi l' aja ha la medesima base, ma ha un altezza che è i soli $^7/_{12}$ dell' altezza del rettangolo moltiplicando che è $^5/_{12}$ di piede quadrato: e come l' altezza ne è soli $^7/_{12}$ così soli $^7/_{12}$ essere ne debbe l' aja, perchè nei rettangoli equi-basici le aje stanno come le altezze. Per aver dunque l' aja cercata prendere conviene $^7/_{12}$ di $^5/_{12}$ di piede quadrato, convien cioè ripetere 7 volte non il rettangolo $^5/_{12}$ di piede quadrato che in questo caso non è a rigore il vero moltiplicando, ma la sua dodicesima parte, vero moltiplicando che da esso deducesi, rendendolo dodici volte più piccolo. E ciò sulla figura tosto otteniamo prendendo prima di ogni altro un rettangolo costruito sulla base $^5/_{12}$ avente l'altezza di un dodicesimo di piede, ed a questo aggiungendone sei l'uno accanto all' altro, finchè siamo giunti salendo sino ai $^7/_{12}$ di piede in altezza. Così è ben chiaro che si è ripetuto 7 volte il do-

dicesimo di $^{5}/_{12}$ di piede quadrato: Ma ripetere 7 volte il dodicesimo di una quantità è ciò che chiamasi moltiplicare per $^{7}/_{12}$: dunque è evidente che l' aja che graficamente abbiamo ottenuta è $^{5}/_{12} \times ^{7}/_{12} = ^{35}/_{144}$ di piede quadrato.

182. Ma questa conseguenza chiarissima, tale non può essere certamente per quelli Allievi ai quali è stato insegnato come si moltiplichi $^{5}/_{12}$ per $^{7}/_{12}$, ma non già cosa significhi questa moltiplicazione, giacchè colla figura sott' occhio trovano evidente che l' aja cercata si ottiene ripetendo 7 volte la dodicesima parte del rettangolo espresso da $^{5}/_{12}$, ma non veggono che ciò si ottiene per mezzo della moltiplicazione per frazione, di cui conoscono il processo, ma non ne hanno l' idea. Come questi Allievi possono accorgersi della identità dell' operazione graficamente eseguita con la operazione aritmetica corrispondente? Di quì derivano le idee indeterminate, oscure e false talvolta che taluni hanno intorno alla misura delle superficie e dei volumi. Ed egli è, Amico mio, anche questo un caso fra i tanti che esaminato con occhio non solo matematico, ma anche ideologico, ci fa conoscere quanto sia compassionevole l' opinione di coloro i quali sostengono doversi insegnare i processi senza molto curarsi delle esatte idee delle operazioni che si vanno eseguendo.

183. Vogliasi finalmente espressa in parti di piede quadrato l' aja d' un pollice quadrato, ossia l' aja di un quadrato costruito sopra $^{1}/_{12}$ di piede lineare. In questo caso abbiasi sotto gli occhi il quadrato di un piede, e in pari tempo il quadrato di un pollice, ossia il quadrato costruito sopra p. es. la prima dodicesima parte del piede.

Cercando l' aja di questo, noi cerchiamo l' aja di un quadrato la cui base e la cui altezza è $^{1}/_{12}$ di piede. Prendendo perciò di mira, giusta il solito canone (§. 177) come moltiplicando quel rettangolo che ha per altezza l' unità lineare cioè il piede, e per base la base della superficie a

misurarsi che è $^1/_{12}$ di piede, è ben chiaro che questo rettangolo avendo la stessa altezza del piede quadrato, ma una base 12 volte più piccola, sarà $^1/_{12}$ del piede quadrato. Ma è forse desso la figura di cui noi cerchiamo l'aja? Nò: esso non ne ha comune che la base. Quindi è che se l'altezza dell'aja cercata fosse 1, 2, 3... piedi, noi dovremmo prendere 1, 2, 3... volte il dato rettangolo, che perciò si distinse col nome di moltiplicando: ma nel nostro caso l'altezza dell'aja che noi ricerchiamo è un solo dodicesimo di piede: quest'aja perciò, mentre ha la stessa base del rettangolo, non ha che $^1/_{12}$ della sua altezza: dunque per aver l'aja cercata, conviene che prendiamo $^1/_{12}$ solo del dato rettangolo, il quale è $^1/_{12}$ di tutto il piede quadrato: dunque l'aja del pollice quadrato, ossia del quadrato costruito sopra il dodicesimo di un piede lineare è $^1/_{12}$ di $^1/_{12}$ = $^1/_{144}$ del piede quadrato cui lo riferiamo, come la figura stessa ce lo manifesta, se per tutti i punti di divisione sì della base che dell'altezza del piede quadrato si tirino alle medesime delle perpendicolari.

184. E generalizzando conchiudiamo che il quadrato costituito sopra $\frac{1}{n}$ di qualsivoglia unità lineare è $\frac{1}{n^2}$ dell'unità quadrato. In fatti il rettangolo avente 1 di altezza e per base la frazione $^1/_n$, è $^1/_n$ del quadrato di 1, del quadrato cioè costruito sulla unità di misura lineare perchè i rettangoli equi-alti stanno come le basi: ma l'aja del richiesto quadrato è la sola ennesima parte di questo rettangolo $^1/_n$, perchè la sua altezza non è 1 ma è $^1/_n$: dunque l'aja del quadrato è $\frac{1}{n}$ di $\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$.

185. Per rapporto poi alla produzione dei volumi, dei parallelepipedi p. es. per la moltiplicazione delle superficie per linee, le osservazioni sono analoghe. Il moltiplicando

non è la superficie base, ma è il parallelepipedo parziale aveute per base la data superficie base del parallelepipedo totale, e per altezza la misura lineare; e questo parallelepipedo parziale ripetuto tante volte quante sono le misure lineari dell' altezza, produce il parallelepipedo totale. Ed avvertenze consimili alle ora espresse hanno luogo quando i termini sono frazionari, cosicchè stimo inutile il dilungarmi in esempi.

Fin qui dei problemi nei quali date alcune linee si ottengono le superficie e i volumi. Prendiamo ora quelli ad esame per i quali dati i volumi e le superficie si ottengono le linee.

186. Quando il Geometra ignora la dimensione di una retta che è base p. es. d' un rettangolo di cui conosce l' aja e l' altezza, ben presto egli giunge ad ottenere la base cercata per mezzo di una divisione. Se p. es. l' aja sia 72 metri quadrati, e metri 18 l' altezza, dividendo 72 per 18, ottiene 4, e 4 esprime il numero dei metri lineari che misurano la base che si ricerca.

L' ottenuta linea però non è il semplice risultato d' una divisione come a primo aspetto si crederebbe. Il ragionamento del Geometra è questo. L' aja del rettangolo costituita da 72 metri quadrati ha 18 metri d' altezza. Dunque risulta di 18 rettangoli parziali tutti aventi la base uguale alla base del rettangolo e l' altezza d' un metro, e perciò tutti eguali. Quindi dividendo per 18 il 72 metri quadrati, è chiaro che si ottiene il numero dei metri quadrati dai quali è costituita l' aja di ciascuno di que' parziali rettangoli. Ma per ispezione di figura tanti sono i metri quadrati che contiene un rettangolo parziale, e tanti sono i metri lineari della base, giacchè la base di ciascun metro quadrato è il metro lineare corrispondente della base cercata: dunque se 4 metri quadrati costituiscono ciascun rettangolo parziale, 4 metri lineari costituire pur deggiono la cercata base

del rettangolo. Per mezzo della divisione dunque rendendo il dividendo, superficie espressa in quadrati, un dato numero di volte più piccolo, altro non possiamo ottenere per quoto che una quantità ad esso omogenea, e perciò quadrati e non linee; ed è per conseguenza falso che risulti per quoto una linea col rendere un dato numero di volte più piccolo il dividendo. Da questo quoto però sempre omogeneo al prodotto e perciò superficie, cioè dal numero dei quadrati costituenti il rettangolo costruito sulla base, che per mezzo della divisione abbiamo ottenuto, si deduce poi per ispezione di figura il numero delle corrispondenti unità lineari; ed ecco la sola avvertenza necessaria al nostro proposito.

Consimili ragionamenti hanno luogo allorchè si dice che dai volumi divisi per le linee si ottengono le superficie ec.

187. Non si creino dunque difficoltà ove non sono. Nelle moltiplicazioni deh! non passiamo con Newton a spogliare il creduto moltiplicando della sua concreta natura lineare, contemplandolo come una generica *quiddità* astratta per poi applicare al prodotto che ne risulta una concreta natura diversa, qual'è una superficie, che quasi salti fuori per una arcana trasformazione; ma tenendo dietro al preciso lavoro che fa la mente per ottenere la dimensione che ricerca, dal numero indicante le linee che è dato dal problema, passiamo a trovare per mezzo dei lumi della Geometria il moltiplicando superficie che è la grandezza delle parti la quale ripetere dobbiamo un dato numero di volte per ottenere il tutto o prodotto, che è la superficie richiesta omogenea al moltiplicando. Nelle divisioni non ispogliamo della sua concreta natura il dividendo superficie considerandolo anch'esso in astratto, per poi applicare al quoto astratto che otteniamo, una concreta natura diversa dalla superficie, qual'è l'estensione lineare: ma dal quoto superficie, ottenuto col rendere il dividendo superficie un dato numero di volte

più piccolo, deduciamo per mezzo dei lumi della Geometria la linea cercata. È così senza la forzata introduzione di strane metamorfosi, che recherebbero eccezioni alle stabilite teorie della moltiplica e della divisione, queste teorie si trovano anzi a meraviglia nei citati problemi verificate in tutti i dettagli, e rapporto alle idee del *tutto*; della *grandezza delle parti* e del loro *numero*; e per rapporto alla omogeneità del moltiplicando e del prodotto, e per rapporto alla eterogeneità dei fattori; e servono inoltre ad appianare quelle difficoltà, che per mancanza di esatte idee possono insorgere nella mente rapporto alla misura delle superficie e dei volumi.

188. In seguito di queste osservazioni non può venir fatto ad alcuno di chiedere, siccome immagina il Lecchi nei suoi commenti all' Aritmetica universale di Newton, come avvenga, *che il prodotto di due linee alle volte è una linea, ed alle volte è una superficie*. Questa richiesta non può essere fatta che da coloro i quali hanno idee indigeste e confuse per inesattezza d' insegnamento. Quegli Allievi infatti che hanno adequate nozioni in proposito, non solo incerti rimanere non possono, se sia ora una linea ed ora una superficie *il prodotto di linea per linea*, ma si accorgono tosto e con ogni facilità non poter esser giammai nè l' una, nè l' altra, perchè la sopra esposta espressione « *il prodotto di linea per linea* » è un assurdo. Sta bene in fatti che una linea sia il moltiplicando: ma è impossibile che una linea sia il moltiplicatore, subitochè esso non può esprimere che *volte*.

Che se poi, corretto l' errore di ammettere concreto il moltiplicatore, si modificasse un poco l' enunciato del problema, e ci si richiedesse « *In quali casi in virtù d'una moltiplicazione una linea dà per prodotto una linea, e in quali altri dà per prodotto una superficie* » io rispondo che una linea non può per moltiplicazione dare che una

linea, ed una superficie non può giammai da una vera linea essere prodotta, perchè il ripetere una cosa non è un alterarne la natura; e che perciò nel citato bivio non possiamo trovarci giammai. Quindi è che si ha per prodotto una linea quando il moltiplicando è una vera linea: si ha per prodotto una superficie quando non già una linea, come comunemente si dice, ma è una superficie il vero moltiplicando, superficie però, la quale notar conviene non esser fra i dati, ma dedursi per i lumi della geometria da una linea, la quale e per esser fra i dati del problema e per essere espressa dal medesimo numero da cui è espresso il moltiplicando che si è da essa dedotto, erroneamente suole nel comune insegnamento essere riguardata per moltiplicando. Erroneamente però, torno a ripetere, poichè questa linea espressa pel numero delle sue unità può ben dirsi essere un segno dell' elemento, ma non già l' elemento producente la superficie che otteniamo per prodotto.

189. Le espressioni però *di linea moltiplicata per linea, di rettangolo prodotto dai suoi lati attigui, di base ottenuta dall' aja divisa per l' altezza* e simili, sono espressioni comunissime, e possiamo benissimo adoperarle, dopo che abbiamo spiegato quali idee dobbiamo annettervi. Ma quando giusta alcuni metodi d' insegnamento si usassero quei laconismi senza corredarli affatto delle debite dilucidazioni, quando abusando talvolta della buona fede dei Giovanetti si aggiungesse a queste espressioni il titolo di *chiarissime, di evidenti per sè medesime*, l' istruzione ditemi procederebbe senza difetti, non avrebbe bisogno di qualche riforma?

190. Un Allievo che venne alle pubbliche mie lezioni di Algebra e Geometria dopo di avere altrove compito tutto il corso di Matematica dell' Abb. Mary, un giorno che io esponeva queste materie, mi confessava che per quanto egli in addietro si fosse affaticato per ben intenderle chiara-

mente allorchè nel corso già compiuto gli erano state communicate, non gli era mai riuscito di ben penetrarne il significato — Erano esse, così mi soggiungeva, un gergo sibilino per me. Io però non azzardava affacciare dei dubbi contro queste espressioni, perchè un poco d' amor proprio aveva pur io, ed arrossiva di dare a conoscere di non intendere cose che mi si spacciavano per le più chiare del mondo. E tanto più me ne asteneva, poichè d' altronde trovava giustissimi i risultati, quando ne faceva le applicazioni. E mi tranquillizzava alla fine, dicendo fra me stesso: il risultato che io ottengo ogni volta che io metto in esecuzione i metodi di misura che mi sono stati communicati è giustissimo, e questa è la cosa che sommamente interessa: serviamocene dunque: e non istiamo più a teorizzare e sofisticare su questi processi, subitochè le mie forze non giungono a ben vedervi chiaro per entro. E così anche questo Giovane attribuiva alla pochezza del suo ingegno ciò che attribuir doveva ai difetti del metodo con cui era stato istruito.

191. Ma quali principalmente io gli soggiunsi erano le cose di che non si trovava paga la vostra mente? — Ve le paleso subito, mi rispose l' Allievo. Ecco una dimostrazione p. es. che poco a sangue mi andava, senza poterne rilevare il vero motivo « *Il quadrato costruito sul pollice lineare è il quadrato di* $^1/_{12}$ *di piede: ma il quadrato di* $^1/_{12}$ *di piede sappiamo essere* $\frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$: *dunque il pollice quadrato è* $^1/_{144}$ *di piede quadrato* ». Il ragionamento è stretto: il risultato è verissimo; eppure io non ne rimaneva soddisfatto, come ora il sono dopo le vostre spiegazioni da queste diverse — Ebbene io soggiunsi. Volete voi veramente conoscere il *perchè* la vostra mente si ricusava all' assenso? Ve lo dirò io. Quella dimostrazione è illusoria — Possibile! Illusioni nella scienza dell' e-

sattezza e dell' evidenza ? — Sì : tant' è . Illusioni , errori contro i primi canoni della logica , quattro termini p. es. invece di tre nel paralogismo che mi avete esposto: e credetelo a me che non amo d' ingannarvi per certo . Rammentatevi che quando avete incominciato a studiare l' Algebra siete stati abituati a considerare come sinonimi le parole 2.ª *potenza* e *quadrato* , e vi si sarà anche detto che la ragione di questa sinonimia l' avreste avuta in Geometria . Ebbene : le imposture vanno svelate : la parola non vi si mantenne, e si profittò invece dell' abitudine che già avevate contratta di prendere per sinonime le due citate espressioni , affine di farvi cadere nella rete, e per indurvi ad accordare una verità senza avere l' impaccio di dimostrarvela . Tutti effetti prodigiosi sono questi della decantata *brevità* dei corsi elementari. Se il pollice è $^1/_{12}$, non v' ha dubbio che il suo *quadrato* (dando a questa parola quadrato quel valore che gli si è dato in Algebra di pura seconda potenza) è certamente $^1/_{12}$ di pollice lineare moltiplicato per $^1/_{12}$, ossia è la dodicesima parte di $^1/_{12}$ ossia è $^1/_{144}$ di pollice lineare . Ecco cosa possiamo su questo proposito conchiudere e nulla più. Quindi la deduzione interessante che il quadrato d' un pollice sia $^1/_{144}$ di piede quadrato è cosa che la esposta erronea dimostrazione non appalesa per nulla , ma che solo si crede che lo addimostri per l' equivoco della parola *quadrato* , cui prima si accorda il senso di 2.ª potenza , e poscia quello di una particolare superficie senza averne affatto dimostrate le analogie .

192. Questa proposizione incontrastabile , mi soggiungeva l' Allievo , che il pollice quadrato sia $^1/_{144}$ del piede quadrato mi veniva esposta anche così « *Per aver l' aja d' un rettangolo qualunque , e perciò anche d' un pollice quadrato , si moltiplica la base per l' altezza , ma sì la base che l' altezza sono* $^1/_{12}$ *di piede : dunque l' aja d' un pol-*

lice quadrato è $^1/_{12} \times {}^1/_{12} = {}^1/_{144}$ » E nemmeno di questa dimostrazione io rimaneva pienamente convinto — Ed il perchè volete anche qui ben tosto conoscere, io di nuovo gli soggiunsi; eccovelo Che debba moltiplicarsi base per altezza, giusta l' esposto significato, per ottenere un rettangolo, e quindi che debba moltiplicarsi un lato per sè medesimo quando si tratta di quadrato, tutti i corsi di Geometria ve lo dimostrano quando i numeri sono interi: ma non ne trovo veruno che ne dia la dimostrazione pel caso in cui i numeri sieno frazionari. Ed in vero tutti que' matematici che non sono per nulla Ideologi, vi diranno che la dimostrazione di questo vero non si dà, li troverete anzi dispostissimi a presumere di sostenere che non si debbe dare, perchè è una conseguenza immediata dell' altra datane quando i numeri sono interi. E così malissimo applicando per mancanza di acconcie riflessioni sulla genesi delle idee, il principio che le dimostrazioni geometriche sono applicabili a tutti i casi particolari della medesima classe, crederanno probabilmente che io appunto per non conoscere l' estensione di questa preziosa proprietà delle matematiche speculazioni, sia di contrario parere. Io però oltre a quelle evidenti ragioni che mi dimostrano non essere bastante il trovare artificialmente disposti in un medesimo gruppo e sotto una stessa denominazione dei fatti particolari, ma esser d' uopo di bene analizzarli nella loro natura per decidere se sieno della medesima classe, nelle vostre difficoltà stesse trovo prove di fatto che mi confermano nella massima in cui sono, che della sopra esposta verità fa d' uopo convincere la mente col sussidio di acconcia figura, facendole conoscere come in realtà trattandosi p. es. dell' aja del pollice quadrato, preso al solito di mira quel rettangolo avente per base la base dell' aja a misurarsi, cioè $^1/_{12}$ di piede, e per altezza il piede lineare, preso cioè di mira come moltiplicando quel rettangolo che è $^1/_{12}$ del piede quadrato, avvenga che

il pollice quadrato sia $^1/_{12}$ di questo rettangolo; poichè allora ben conoscendo in Aritmetica cosa sia $^1/_{12}$ di $^1/_{12}$, debbe per necessità convenire che un pollice quadrato, ossia la dodicesima parte di quel rettangolo è $^1/_{12}\times{}^1/_{12}$ ossia $^1/_{144}$ del piede quadrato siccome dimostrossi (§. 183).

193. Finalmente mi disse l' Allievo: anche sulle formole del teorema dell' ipotenusa avea dei dubbi e dell' oscurità — E di ciò pure senza che vi spieghiate d' avvantaggio, ho bene inteso il motivo, io gli replicai. Posto che I, C, c, esprimano i respettivi numeri e p. es. 5, 4, 3 delle unità lineari costituenti l' ipotenusa, il cateto maggiore e il cateto minore di un triangolo rettangolo, voi avete tutte le ragioni per dichiarare che il teorema di Pittagora è male espresso dalla formola (A) $I^2 = C^2+c^2$ . . . . Eh! Eh! mi sento dar sulla voce, e mille scagliarmisi addosso dicendomi, vuoi tu dunque rovesciar tutto in Algebra e in Geometria! Nulla va bene, tutto è inesatto, e niuno fin qui (te eccettuato.) ha azzardato il menomo reclamo contro questa espressione ammessa universalmente — E questa espressione medesima uso ancor io, ma con questa differenza dal metodo comunemente tenuto, che prima di farne uso, mi piace di mostrare come sia a rigore inesatta, e come ciò non ostante faccia comodo il servirsene dopo i debiti schiarimenti in proposito. Si: $I^2 = C^2+c^2$ è una espressione inesatta. Ed in vero, il teorema di Pittagora ci mostra che l' aja del quadrato costituito sulla ipotenusa è uguale alla somma delle aje dei quadrati costruiti sui cateti. D' altronde quando I esprime una linea e p. es. metri lineari 5, I^2 non esprime che metri lineari 5 ripetuti 5 volte, ossia 25 metri lineari, ossia una linea lunga 25 metri e non già una superficie di 25 quadrati aventi il lato di un metro. Dicasi il medesimo rispetto a $C = 4$ e a $c = 3$ metri lineari. Se vogliamo dunque che la formola (A) esprima il teorema di Pittagora, fa d' uopo ap-

plichiamo al nostro caso l' avvertenza fatta allorquando data la base, e l' altezza di un rettangolo, si giunse a determinarne l' aja (§.177).

Se l' ipotenusa *I* è metri 5 ed è la base del quadrato che vi è costruito, metri quadrati 5 esser pur debbe quel rettangolo parziale avente l' altezza d' un metro solo, cui pure l' ipotenusa serve di base. Ed è questo rettangolo di 5 metri quadrati e non già la base di 5 metri lineari ossia l' ipotenusa, il vero moltiplicando che debbe *I volte* ossia 5 *volte* ripetersi, perchè *I* ossia 5 è l' altezza. Fatti sopra *C* e *c* i medesimi riflessi, notiamo che allorquando parlasi di teoremi relativi alle superficie, le lettere *I*, *C*, *c* indicano sempre gli stessi numeri che nel particolare esempio preso di mira sono 5, 4, 3: ma havvi un rimarco sul valore delle loro unità. Negli indicati teoremi le lettere *I*, *C*, *c* servono per esprimere e moltiplicando e moltiplicatore. Quando esprimono il moltiplicatore, la loro unità è sempre invariabile, non potendo altro indicare che *volte*. Quando esprimono il moltiplicando, l' unità di questi numeri *I*, *C*, *c* non è più la misura lineare che loro si è a principio accordata, ma in vece è una superficie, è cioè il quadrato su di essa costruito; cosicchè mentre *I* esprimeva prima 5 metri lineari costituenti l' ipotenusa, ora esprime 5 metri quadrati costituenti quel rettangolo parziale avente l' altezza d' un metro che ha per base l' ipotenusa; e dicasi il simile di *C* e di *c*.

Fatte queste avvertenze relativamente al cambiamento di valore che l' indole del problema esige, che vada fatto sul moltiplicando, è chiaro che ripetendo *I* volte, ossia 5 volte, il rettangolo parziale *I* costituito da 5 metri quadrati, si avrà I^2 ossia 5^2 ossia 25 metri quadrati che costituiscono il quadrato totale costruito sulla ipotenusa; e ripetendo *C* volte ossia 4 volte il rettangolo parziale *C* costituito da 4 metri quadrati, e ripetendo *c* volte ossia 3 volte il ret-

tangolo parziale c costituito da 3 metri quadrati, si avrà C^2 ossia $4^2 = 16$, e c^2 ossia $3^2 = 9$ metri quadrati. Fatto dunque il rimarco che d' altronde io non so se sia in verun corso avvertito, che nella formola (A) i segni I, C, c esprimono rettangoli e non rette, niuna difficoltà più dessa presenta, mentre l' offre ben giustamente, quando si suppone (come comunemente accade) che I, C, c esprimano linee e non rettangoli; in tal caso in fatti le linee I, C, c alzate alla 2.ª potenza, ossia ripetute per un numero di volte eguale alle loro unità, ben voi riflettevate che dar non potevano che linee. Nè serviva a tranquillizzarvi nella credenza che la formola (A) esprima quadrati, il sostituire la parola quadrato a quella di 2.ª potenza, perchè bene intendevate che la sostituzione d' una ad altra equivalente espressione, non può mai cambiar la natura delle cose e produrre la trasformazione delle linee in superficie.

194. E quando poi all' opposto estraendo la radice di ambi i membri di $I^2 = C^2+c^2$, otteniamo $I = \sqrt{(C^2+c^2)}$ ovvero $I = \sqrt{(4^2+3^2)} = \sqrt{25} = 5$ metri lineari, sulla qual formola pure a chiare note legger non sapeva la vostra mente, ogni difficoltà si dilegua se vi fate a riflettere che la radice seconda di C^2+c^2 altro non è che un moltiplicando il quale ripetuto tante volte quante sono le sue unità, dà C^2+c^2. Essa radice dunque non essendo che il moltiplicando esser debbe della stessa natura del prodotto, e perciò debbe esprimere metri quadrati. E poichè troviamo che $I = \sqrt{(C^2+c^2)} = \sqrt{(4^2+3^2)} = 5$, così dobbiamo concludere che le 5 unità che costituiscono I, sono metri quadrati, che cioè di 5 metri quadrati è quel rettangolo parziale chiamato I costruito sulla base ipotenusa, il quale ripetuto per quante sono le sue unità forma il quadrato totale. A rigore dunque la I che si ottiene per estrazione di radice esprime superficie: ma poichè dalla cognizione che 5 sono i quadrati costituenti il rettangolo par-

ziale costruito sulla ipotenusa, deduciamo che sono pur 5 i metri lineari che costituiscono la stessa ipotenusa, così in ultima analisi conchiudiamo, che *I* se come risultato del calcolo esprime unità superficiali (metri quadrati) come final risultato di geometrica osservazione, esprime unità lineari, ossia il numero dei metri che la ipotenusa cercata contiene.

195. Di questi schiarimenti l'Allievo rimase perfettamente appagato: altri però mi soggiunse — Ed egli è possibile mai che a tutte queste sottili indagini abbia a piegarsi la mente dei Giovani e le debba andar rugumando ogni volta che s' incontra in simili casi? — Che le esposte indagini alcun che non presentino di difficile, sicchè piegar vi si possa la mente dei giovani, salta agli occhi di ognuno, ed io ne ho molte prove di fatto. Che ritornarle in pensiero debba ogni volta che in simili casi s' incontri, proposizione ella è questa che vorreste farmi dir di voi, perchè essendone patente l' inconvenienza, vi provereste a far credere inconveniente anche la prima proposizione, con la quale a bella posta l'avete amalgamata. Nò, miei Signori, non date sinistra interpretazione alle mie parole. Quando le idee si sono rettificate; quando l' Allievo in seguito di qualche applicazione siasi fatte proprie le necessarie vedute, sarebbe una insulsa ridicolaggine il pretendere d' avvantaggio, nè questa mi è mai passata pel capo. Io non mi lamento perchè le esposte avvertenze non sieno applicate *ogni volta* che ne capiti l' opportunità, io mi lamento, e notate bene la differenza del concetto, perchè in alcuni metodi d' insegnamento non sieno agli Allievi esposte *giammai* — Che se mi rispondeste che questa mia accusa è falsa, o almeno non provata, poichè al laconismo debitamente usato nel testo, suppliscono le spiegazioni orali de' maestri, le quali inutili diverrebbero, se a questi non si serbasse il dire qualche cosa del proprio: — ciò non suffraga, io vi replico. Posto pure che

gli Istruttori esponessero con tutto il dettaglio le sopra sviluppate avvertenze, *dato ciò* (e risparmiò pur anche , se così vi piaccia , quel *non concesso*, che pur a salva-guardia suol sempre porsi nelle scolastiche disputazioni) io soggiungo che questo non basta .

Saepius irritant animos demissa per aures
Quam quae sunt oculis subjecta fidelibus .

E perciò quando di massime si tratti che spargono viva luce sopra una moltitudine di teoremi, fa d'uopo che l' impressione non sia passeggiera e perciò sia fatta non *ad aures* semplicemente, ma sia consegnata nei libri, sicchè esser possa dagli Allievi consultata più e più volte a loro bell' agio . Il mancare a ciò è un mancare ai canoni principali del buon insegnamento, egli è un servire a quel mal inteso desiderio di BREVITA' , contro la quale per quanto alto inveisca e declami e scriva a lettere cubitali, io credo di non scrivere e declamare mai abbastanza .

Ed ecco il *Gloria* dei salmi miei .

LETTERA IX.[a]

EPILOGO E SCOPO DELLE TRATTATE MATERIE E CONCLUSIONE

ARGOMENTO

Ho dato al mio scritto la forma di lettere le più familiari, acciò si risenta il meno possibile dell' aridità della materia trattata, ma ho procurato in pari tempo che tutta vi sia nel filo dei ragionamenti una logica severa. Non ho parlato che di una distinzione da me introdotta nei numeri, e di una dilucidazione arrecata alle nozioni della moltiplica e della divisione. Ciò mi ha portato a dimostrare difettosi molti tratti del comune insegnamento, che per essere troppo superficiale armonizza con la dominante avversione ai profondi e severi studi. Avrò perciò urtato e Studenti ed Istruttori? No; nè gli uni, nè gli altri (§. 197).

---

197. Obbligato dalle mie occupazioni a sospendere per qualche poco queste mie conferenze con voi, vi prego mio egregio Amico a meditare intanto su quello che vi ho scritto finora. Io vi esposi fin dalla prima mia lettera (§.29) come Autori di molta celebrità abbiano in generale dichiarato difettosi e meritevoli di esser rifatti i libri elementari e specialmente delle scienze esatte. Questo bisogno non è dunque un delirio. Que' sommi scienziati però, mentre lo hanno asserito, non si sono poi curati gran fatto a discendere a particolari dettagli. Io ho creduto bene occuparmi di questi (che tali poi mi hanno sembrato da non esigere una totale rifusione di materie) e al tempo stesso, qualunque ne sia l' esito, ho almeno tentato di apporre a tutti i notati difetti le necessarie correzioni. Ecco l' oggetto principale delle nostre conferenze. E sebbene fin qui d' altro non vi abbia parlato, che di una distinzione da me introdotta nei numeri e di

alcune dilucidazioni da me aggiunte alla moltiplica e alla divisione, pure io credo di avervi addimostrato abbastanza a quante inesattezze ed inconvenienti essi porgano riparo. Ho procurato che queste mie lettere si risentissero il meno possibile dell' aridità della materia che vi è sviluppata, e al tempo stesso sì nel dimostrare principi che nel confutare errori, fossero un utile esercizio di logica la più severa. Io ho avuto in animo di addestrare pur anche la mente dei giovani a farsi un' abitudine di non starsene contenti delle assertive, ma di cercare il *perchè* delle cose e investigare per così esprimermi, il pelo nell' uovo. Molti oggetti importanti voi ben vedete dunque che io ho avuto in mira: ma gli avrò poi conseguiti? *In magnis et voluisse sat est.* Ciò che però io spero al certo di aver dimostrato all' evidenza si è la necessità di dare maggiore sviluppo di quello che comunemente si pratichi a molte dottrine fondamentali e di svolgere il senso che accordare conviene a parecchie laconiche espressioni usate nelle scuole che per sè medesime sono insignificanti ed assurde. Quando gli elementi in ogni genere di discipline si vengono insegnando senza far sì che la mente degli Allievi s' impossessi delle esatte primitive nozioni, le quali sono i cardini della scienza, e che tanta esercitano influenza nel rimanente dello scibile umano, i metodi dell' insegnamento armonizzano allora perfettamente con le disposizioni di molta parte della gioventù, che la fatica sdegnando, ama solo al più di tenere in qualche esercizio le mnemoniche facoltà, trascurando affatto le intellettive.

Ed in questo pienissimo accordo fra la poca profondità con la quale le scientifiche materie sono sviluppate in una colluvie di manuali, di compendi, e di indici piuttostochè di trattati da una parte e fra la soverchia tendenza all' ozio ed all' infingardaggine che scorgesi in molti dall' altra, qual meraviglia se tanta troviamo superficialità d' i-

struzione nel maggior numero di quelli pur anche che aspirano ad appartenere alla parte colta e dotta della società! Qual meraviglia se vediamo uscire dalle Università degli Allievi i quali non si risparmiando dal gittar fuori *ampullas et sesquipedalia verba*, e con esse pompa facendo di quella vernice scientifica che ricuopre la crassa loro ignoranza, danno le più evidenti prove di fatto che le loro parole sono sempre *versus inopes rerum nugaeque canorae*! E come a meno, se *Scribendi recte SAPERE est principium et fons*! Essi disputano *de rebus omnibus, et de quibusdam aliis*: ma, poichè la massima del gran Genio di Pisa mai non fallisce, che cioè *la vana presunzione d' intender tutto non può aver principio da altro che dal non avere inteso bene mai nulla*, sempre avviene che cotestoro anzichè la pubblica stima, tale si attirino generale disprezzo che indurrebbe il lepido Poeta a di nuovo prorompere contro ciascuno di essi in quel verso quanto triviale altrettanto espressivo

« *Se infarinato sei, vatti a far friggere* »

Io però così declamando contro e i difetti dell' insegnamento, e la poca volontà d' istruirsi, urterò forse ad un tempo e studenti e istruttori? Nò: io non incontrerò l' indignazione nè degli uni nè degli altri.

Urterò gli studenti? Permettetemi che prima di ogni altro io distingua i veri dai falsi, e che a tenore del modo mio di vedere ve li definisca. Egli è bene che osserviate e apprezziate l' immensa distanza che passa fra gli uni e gli altri. Egli è bene che rimarchiate quanto i primi e per le fatiche che sostengono e i sacrificii cui soggiacciono, e le belle speranze che con tutto il fondamento fan nascere e crescere, meritino la pubblica stima, la generale affezione! Egli è bene che ponderiate dall' altro lato quanto i secondi e per l' attuale loro condotta e per gli ahi! pur troppo ben fondati presagi del nullo loro profitto, sieno meritevoli e

di essere posti in ridicolo, siccome ben loro avviene (e non se ne avveggono i gonzi) e di essere, siccome il sono, tenuti a vile pur troppo, o quali immondezze, su cui cadono inutilmente i raggi del sole, sì i raggi di quel sole di sapienza che dai Licei e dalle Università si irradia pure sopra di essi, o quale fango vilissimo che alle cure male rispondendo dell' industre vasaio, anzichè affatto nobilitarsi e sotto eleganti forme foggiato divenire splendido ornamento nei tavolieri dei più ricchi palagi, si ostina in vece a rimaner sempre fango, abbiettissimo fango. Sì egli è bene che queste due classi in cui quella gioventù si ripartisce che è agli studi diretta, sieno ben distinte e ben definite.

Veri studenti sono que' Giovani che *col massimo impegno* studiano *ogni giorno* sulle *sole* materie trattate nelle *due* o *tre* scuole al più che frequentano, *tutte* quelle ore dedicandovi che nel lavoro sarebbero obbligati ad impiegare se fossero giornalieri operai. E questi, facendo così economia suprema del tempo, lungi dall'ozio e dai brutali suoi figli, a vantaggio di sè stessi, delle proprie famiglie e della patria conseguiscono lo scopo desiderato, e col fatto addimostrano quanto infallibile sia la sentenza che sebbene notissima, pur non è mai nè ripetuta, nè lodata abbastanza, la sentenza, dico, del celeberrimo Orazio

Qui cupit optatam cursu contingere metam,
Multa tulit, fecitque puer, sudavit et alsit,
Abstinuit Venere et vino.

Pseudo-studenti al contrario son quelli che dopo le ore di scuola, cui nemmeno sempre intervengono, nell' ozio poltrendo, o dilettandosi al più d' una vaga, sempre improficua e spesso perniciosa lettura, anzichè lo studio, coltivano invece

« *La gola il sonno e le oziose piume*
Ch' hanno dal mondo ogni virtù sbandita »

e solo allora che il sole volge alla costellazione del cancro, la quale il più espressivo emblema ci offre del loro

progresso, affaccendati si pongono con gli occhi del corpo a scorrere le poche pagine di qualche compendio stampato o manoscritto relativo alle materie di scuola, all' oggetto di carpir gradi negli esami imminenti, e di acquistare cognizioni non già, ma la presunzione sola di averne. E cotestoro, gettito facendo delle ore più belle di questa effimera vita, non possono attendersi che il più infelice avvenire. Diventare essi infatti così non potranno, che peso e noja a sè stessi, soqquadro e desolazione delle proprie famiglie, aggravio disturbo e peste della società, che dalle parasitiche influenze loro verrà aduggiata, esausta, consunta.

E dopo queste dichiarazioni intorno al significato delle distinte due classi, potranno i VERI STUDENTI, rapporto al novero dei quali, malgrado l' universale scarsezza, la nostra Perugia ha il vanto di non essere ad altre città certamente seconda, potranno meco adontarsi, se ad essi, anzichè dirigere frizzanti parole, non posso a meno di esternare i più vivi sentimenti di congratulazione, di stima e di affetto, siccome a quella parte eletta della studiosa gioventù cui (senza abilità forse, ma non certamente senza buone intenzioni) ho io dedicata la maggior parte della mia vita? No daddovero. Adontarsi forse meco potranno i PSEUDO-STUDENTI? Nò: Neppure essi. Piuttostochè sdegnarsi infatti di qualche frizzo, da cui fossero mai tocchi al vivo in queste mie lettere, me ne sapranno invece buon grado, se conosceranno che desso è diretto a scuoterli dal loro torpore, ed a far sì che in società eglino facciano *realmente* quella vivace e brillante comparsa che di farvi hanno sì sollecita brama. Chè compassionevole cosa ella è certamente il vedere molti Giovani porre ogni studio nell' esteriore portamento, ed ogni cura possibile per apparire svelti, scaltri, avvedutissimi, e starsene inoltre nell' avviso fermissimo di essere riveriti per tali, nel tempo stesso poi che la società li ritiene e deride come i più babbei e i più scimuniti merlotti del mondo!

Egli è perciò, mio carissimo che l' uso di qualche frizzante caustico è necessario per essi. Io metto a profitto la sua azione corrosiva per quanto più posso con la retta intenzione pur anche di distruggere, se mi è possibile, in cotestoro una escrescenza, alla sommità del cranio loro spuntata, che attesa la sua piccolezza non è da essi avvertita, tutta stando nascosta fra i loro capelli — Forse un piccolo corno? — Oibò: non è quello il posto: ella è una escrescenza di cornea durezza, non però puntuta, ma adunca. Per la qual cosa non di rado avviene poi che scaltra mano, senza che essi se ne avvedano affatto affatto, vi appicchi una sottilissima ma rigida spranga uncinata alla sua estremità. Ed in virtù di questa ecco le tante volte il povero capo loro obbligato a dei moti ora verticali ed ora orizzontali, giusta il capriccio del furbo motore. E poichè ai nostri giorni, sapete bene, che tanto quei mezzi, che sono atti a deprimere e sopire, quanto quelli che sono atti ad esaltare la nostra sensibilità si sono per le chimiche scoperte moltiplicati, così con questi agenti di stupefazione e di esaltamento gli astuti manovratori vanno in siffatta guisa all' opportunità preparando le menti, e disponendole sì bene, che quando ad essi sembra matura la messe, a loro talento quelle spranghe muovendo, fanno a que' poveri illusi apparire spontanei (ed apprendetene bene il danno) quei moti che sono meramente meccanici. E la scena, la quale seriamente meditata nelle sue conseguenze è rattristantissima, veduta da una certa posizione ha in sè così del ridicolo, che non può a meno di non eccitare alle risa. Voi vi sentireste sganasciare, se a sangue freddo dato vi fosse di fare capolino di quando in quando da una finestrella che sovrasta al palco scenico di quel teatro comunemente denominato *Teatro del Mondo*, in cui questi uncinati giovani fanno comparsa. Voi gli vedreste

All' aria, al guardo, al portamento altero
E col cigaro in bocca or sempre or mai,

apparir uomini di qualche importanza ; ed intanto, mentre unicamente in grazia del filo sorreggitore sono di peso quà e là trasferiti , fermi tutti nella credenza li trovereste di *agire accalorati in alte imprese*, e muoversi di moto lor proprio. Or bene se il caustico adoperato distruggesse in vari di cotestoro le prave tendenze che hanno ad imbeversi unicamente delle leggere tinture e dei vaporosi effluvii delle cose che sono i produttori di quella morbosa escrescenza , e così non solo estirpasse dal capo quel pericoloso attaccagnolo , ma lo cause pur anche del suo ripullulamento, sicchè gli umilianti moti meccanici non avessero più a riprodursi, io non avrei loro procurato del bene ? Oh ! quante illusioni sparirebbero allora da quella scena teatrale!

Ma ciò basti per rapporto agli studenti, delle distinte due classi dei quali ho cercato delinearvi un abbozzo. E poichè l'ho in carta gettato negli scorsi giorni , nei quali un' affezione reumatica mi aveva invase le inferiori estremità, sarebbe mai che Natura ai compensi proclive , mentre teneva intorpiditi e inceppati i miei piedi , resa mi avesse più libera e sciolta la mano , sicchè, bene non già , ma più vive e decise abbia del quadro tratteggiate le tinte? Io nol so veramente : ma per quanto vive esse fossero , so certo che non lo sono a quel grado che io avrei desiderato, e quanto m' ingegnerò anche in seguito che lo sieno , per iscuotere quella Gioventù spensierata, che in mezzo ad un'*apparente* vivacità , sonnacchiosa si pasce della sua scimunitaggine. In essa io vorrei , se fosse possibile , istillare non solo vergogna, ma orrore e ribrezzo per la superficiale istruzione , che peggior cosa ella è assai della stessa ignoranza .

E degli *Istruttori* che dovrò dirvi ? Dirovvi che appunto per non urtarli ed offenderli, io ho preso a rimarcare e correggere que' difetti solamente che ho trovato nei Classici già estinti, cosicchè se di questi difetti sono imbevuti anche i viventi , vede ognun quanto poco sieno ad essi imputabili , subito che gli hanno coltivati e coltivano sulla

scorta e sull' esempio dei sommi . E per non mancare poi ai debiti riguardi , dei contemporanei Italiani , non ho tenuto affatto parola . Malgrado però le usate precauzioni , non v' ha dubbio che molti e molti e Professori e Scrittori troveranno in queste mie lettere contradetta qualche loro opinione . Ebbene, quali conseguenze voi vorreste dedurne? Credete forse che si adonteranno , perchè la critica fatta ai Classici , e che dai Classici sopra di essi riverbera , deriva da me che sono tenuissima cosa in loro confronto ? No : i veri cultori delle lettere e delle scienze sì bassi sentimenti non nutrono . Nè sono essi in conto alcuno ad addebitarsi , se prima di me non si sieno di qualche inesattezza avveduti . Ed in vero nei medesimi studi , diversi prendono direzioni diverse . Compiuto il corso Universitario , taluni proseguono ad occuparsi della parte sublime della scienza , vi fanno progressi e scoperte , e trovando così , più che in altro , nella pubblica estimazione il guiderdone delle loro fatiche , sempre più nell' arduo e nel difficile della scienza s' inoltrano . Diretti per questa carriera , non possono avere certamente a loro disposizione quel tempo che la lenta lima richiede , e ben lungo, per togliere le scabrosità dei primi getti che improntò il genio loro , e per ben levigarli . Questa è partita di lavoro che ad essi non spetta . Taluni altri poi , dato uno scandaglio anche alle forze degli omeri loro , rinunziano al diletto perfino che reca lo studio stesso delle sublimi verità, e facendo il sagrificio di ogni speranza di cogliere la più lieve fronda di lauro negli alti dominii delle studiate discipline , si danno a meditare nel campo ristretto degli elementi delle scienze per togliere i piccoli ostacoli , i triboli , i sassi che ingombrano lo spinoso sentiero che al santuario del vero conduce , e per portare a polimento que' primi classici monumenti che sul suo vestibolo i grandi ingegni depositarono . E fra gli studiosi di questa classe appunto io mi trovo , che abbandonato totalmente il campo delle alte teorie, tutto ho occupato il poco

tempo che sopravvanza alle mie incombenze, per dedicarlo ai puri elementi delle scienze. Ed egli è appunto che per questo totale abbandono da me fatto delle più elevate dottrine, e per la deficienza in me di quel che chiamasi slancio di mente, ed anche per non essere dotato di felice memoria, limitatissimo, e ben assai più di quello che possiate voi credere, è il perimetro delle mie cognizioni. Ciò non pertanto, se in questa parte meno ardua e difficile dello scibile, verso la quale si sono aggirati i miei pensieri, qualche utile riflesso fosse uscito fuori dalla pochezza del mio spirito, che stato non fosse in antecedenza avvertito da Professori ed Autori ragguardevolissimi, e qual meraviglia, se di tutt' altro si sono essi sempre occupati? Dovrebbe per questo diminuire nel pubblico la somma stima di che sono meritevoli? Nò certamente. La loro tela, è sempre tela di Appelle, quantunque ciabattino come io mi sia, abbia di qualche figura giustamente criticato i calzari. Ma sebbene nella mia critica, procurato io abbia di non procedere *ultra crepidam*, e di non precipitare nei miei giudizi, quale incontro essi avranno?

Saranno tutti erronei od inutili i miei avvertimenti? Io non mi sento umile abbastanza per crederlo. Dirò anzi di più: della verità di parecchi in queste lettere espressi io non dubito. L'approvazione già ricevutane da molti dotti avvalora il mio giudizio; e perciò io sono d' avviso che profitto ne trarranno i più ritrosi pur' anche. E come a meno, o Signori? quando di certi metodi si sono posti ad evidenza gli agguati, gli inganni, i paralogismi, le ridicolezze aggiungo pur anche, e senza titubanza lo aggiungo, come è possibile, che cessata la buona fede, si continui a seguirli? Perchè ciò si verificasse, notate bene,

Cornuto è l' argomento, e non v'è scampo,

bisognerebbe essere o IMBECILLI per non intendere, oppure CAPARBI per ostinarsi dopo di avere inteso; e i buoni istruttori non sono nè l' uno nè l' altro.

Saranno all' opposto tutti ineccezionabili e giusti i miei avvertimenti? Che io ciò abbia a presumere, e lo abbia in quel mentre stesso in cui mi sono fatto a svelare i molti errori che si trovano nelle opere dei Classici pur anche; che io nel mentre stesso in cui addimostro la somma facilità con la quale comunemente si cade in isbagli ed inesattezze, abbia ad avere l'impudenza di credermene esente, egli è al certo impossibile. Inesattezze e sbagli perciò io avrò commessi e a bizeffe. Ed è per tale oggetto appunto che sugli inganni in cui mi trovassi, gradirò al sommo le opportune avvertenze. Di queste, Amico carissimo, prego voi e chiunque vorrà degnarsi di leggere questo scritto, a farmi regalo. Si: Dalla discussione dei pensamenti diversi limpida e bella sorge la verità, scopo primiero delle nostre fatiche, unica meta cui debbe anelare il nostro intelletto. Ingenuo ciò che nelle trattate materie io sentiva ho già esposto: ma tutt'altro che per un oracolo io riguardo la mia opinione. Senza umiliazioni, è vero, ma senza orgoglio pur anche o Lettore benigno a te la presento,

Si tibi vera videtur
Dede manus, et si falsa est accingere contra

Lucrezio

Se il ver vi trovi, opporti è bassa impresa,
E se il falso vi scorgi, a me il palesa.